

## Глава. 2. Маятник-сердце

В главе описан новый вид маятника, представляющего собой три горизонтально лежащих цилиндра, стянутых резинкой. Выведено и численно решено дифференциальное уравнение колебания такого маятника.

*Комаров смотрит и видит шар.  
 “Что это?” – шепчет Комаров.  
 А с неба грохочет: “Это шар.”  
 “Какой шар?” – шепчет Комаров.  
 А с неба грохочет: “Шар гладкоповерхностный!”*

Даниил Хармс «О явлениях и существованиях»

По просторам интернета «гуляет» вот такая задача – рис. 2.1.

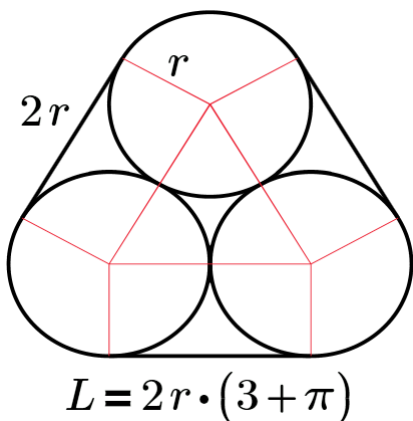


Рис. 2.1. Три окружности, стянутые веревкой

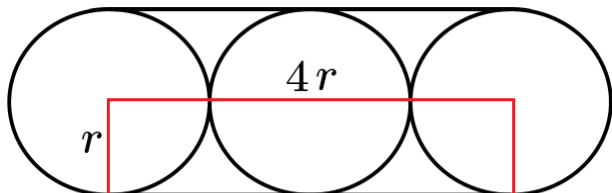
Есть три окружности с одинаковыми радиусами  $r$ . Необходимо найти длину «веревки», связывающей их воедино в виде пирамиды. Задачу, кстати, можно, немного усложнить и вернуть назад в интернет – попросить найти площадь, ограниченную веревкой.

Ответ о длине веревки найти довольно просто. Для этого нужно начертить отрезки прямых, соединяющие центры окружностей между собой. Получится равносторонний треугольник со сторонами  $2r$ . Далее необходимо соединить центры окружностей с точками, где «веревка» отрывается от окружностей. Получатся три прямоугольника со сторонами  $r$  и  $2r$ . Длина «веревки»  $L$  будет равна длине одной окружности (длина трех дуг окружности с углом 120 градусов) плюс шесть радиусов окружностей (три длинные стороны прямоугольников). Соответствующую формулу можно увидеть внизу рисунка 2.1.

Задачу, кстати, можно обобщить: найти длину веревки, связывающей любое число окружностей любого радиуса. Если оставить три разных окружности, но «связывать» их не веревкой, а треугольником, то мы придем к задачам, решенным итальянским математиком Мальфатти [1]. Это треугольники Мальфатти и задача Мальфатти. Треугольник используется, когда выставляют шары в начале игры в бильярд.

## Глава 2

А давайте перейдем от математики (геометрии) к физике и возьмем три одинаковых *цилиндра* массой  $m$  (три круглых карандаша, например, или три алюминиевые банки с напитками – см. рис. 2.9 ниже), стянем их не веревочкой, а круглой (замкнутой) *резинкой*. Примерно так стягивают в пучок волосы на голове или банкноты в пачку. А потом положим все это плашмя на стол – см. рис. 2.2. Что произойдет?



$$L = 2r \cdot (4 + \pi) \quad \frac{4 + \pi}{3 + \pi} = 1.163$$

Рис. 2.2. Три цилиндра (вид с торца), стянутые резинкой и положенные на стол (показана формула длины резинки  $L$  и её относительное удлинение по сравнению со случаем, показанным на рис. 2.1)

Ответ тоже может показаться довольно простым: резинка стянет три цилиндра в пирамиду, показанную на рис. 2.1. Длина резинки при этом минимизируется, уменьшится примерно на 17 процентов, которые мы еще упомянем. Так мыльный пузырь «стягивается» в шар, у которого, как известно, минимальная поверхность среди геометрических тел одного объема.

Но резинки бывают разными – с разной жесткостью. Тут самое время вспомнить знаменитый «школьный» закон Гука, гласящий, что растяжение резинки пропорционально силе, к ней приложенной. Коэффициент пропорциональности – это коэффициент упругости  $k$  (коэффициент Гука). Материалов, отвечающих такому линейному закону, в природе нет. Вернее, дело обстоит так. При незначительных растяжениях мы имеем некую линейность, существенно упрощающую расчеты. Наша резинка будет удлиняться менее чем на 17% (см. рис. 2.2 с числом 1.163...), и мы вправе применить тут линейный закон Гука<sup>1</sup>. Но при значительных растяжениях линейность пропадет [2]: если резинку сильно растягивать, то она постепенно перестанет удлиняться, а потом и вовсе порвется. Если в наш расчет ввести нелинейность, то задача несколько усложнится (в формуле потенциальной энергии резинки появится интеграл), но характер ответа останется прежним.

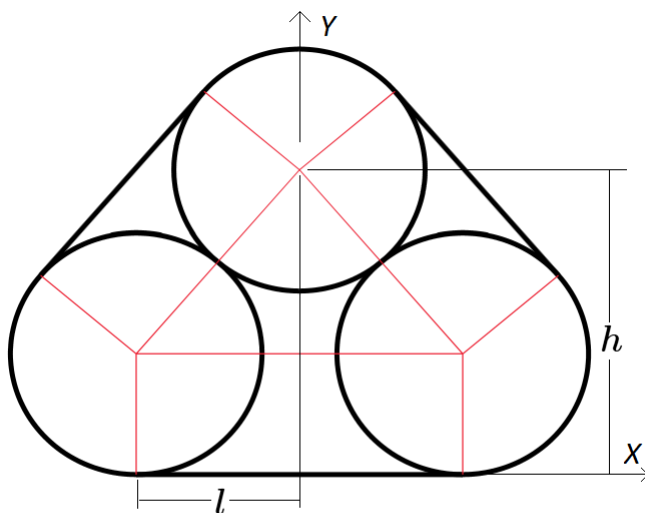
Так вот, если резинка достаточно эластичная, то может произойти вот что.

Средний цилиндр может оказаться в стабильном положении, показанном на рис. 2.3, характеризуемым тем, что сумма потенциальных энергий верхнего цилиндра и растянутой резинки окажется минимальной (принцип Д'Аламбера – Лагранжа [3]). Докажем это простым физико-геометрическим расчетом с учетом того, что треугольник, соединяющий центры

<sup>1</sup> 17 и 7 – это два «красивых» простых числа, но не только. Если рассматривать простейший маятник (груз, подвешенный на веревочке), то там фигурирует число 7. Условно считается, что при угле отклонения маятника от вертикали меньшем чем 7 градусов, в дифференциальном уравнении такого маятника синус угла можно заменить на сам угол, что существенно упрощает решение задачи и дает знаменитую «школьную» формулу периода колебания маятника с квадратным корнем. Кстати, у простейшего маятника можно тоже заменить жесткую веревочку на эластичную резинку...

## Глава 2

окружностей (см. рис. 2.1), теперь будет не равносторонним, а равнобедренным с длиной основания  $2l$  и боковыми сторонами, равными  $2r$ .



$$l = \sqrt{(2r)^2 - (h-r)^2}$$

$$L = 2(l + \pi \cdot r + 2r)$$

Рис. 2.3. Стабильное положение центрального цилиндра

На рисунке 2.4 показана созданная в среде SMath функция  $PE$  с аргументами  $h$  и  $k$ , возвращающая потенциальную энергию нашей механической системы, состоящей из трех цилиндров и стягивающей их резинки. В функции  $PE$  аргумент  $h$  – это высота подъема среднего цилиндра (см. рис. 2.3), а  $k$  – это коэффициент упругости резинки. Эта энергия складывается из потенциальной энергии приподнятого среднего цилиндра  $PE_D$  и потенциальной энергии растянутой резинки  $PE_B$ . Резинка, повторяем, растягивается на величину  $\Delta L$  незначительно, поэтому можно задействовать в расчетах линейный закон Гука. Формула для потенциальной энергии растянутой резинки с коэффициентом упругости  $k$ , умноженным на половину квадрата растяжения резинки  $\Delta L$ , повторяет формулу кинетической энергии, где вместо коэффициента упругости выступает масса, а вместо растяжения – скорость. Сразу вспоминается рогатка, передающая потенциальную энергию растянутой резинки в кинетическую энергию вылетающего из рогатки камня... Кинетическая энергия всех трех цилиндров будет учтена, когда мы будем составлять и решать дифференциальное уравнение колебательных движений цилиндров (рис. 2.11).

Но мы отвлеклись! Вернемся к нашей задаче!

## Глава 2

$$m := 1 \text{ кг} \quad r := 1 \text{ м}$$

$$PE(h; k) := \begin{cases} PE_D := m \cdot g_s \cdot (h - r) \\ PE_B := \begin{cases} l := \sqrt{(2 \cdot r)^2 - (h - r)^2} \\ L := 2 \cdot (l + \pi \cdot r + 2 \cdot r) \\ \Delta L := L - 2 \cdot r \cdot (3 + \pi) \\ k \cdot \frac{\Delta L^2}{2} \end{cases} \\ PE_D + PE_B \end{cases}$$

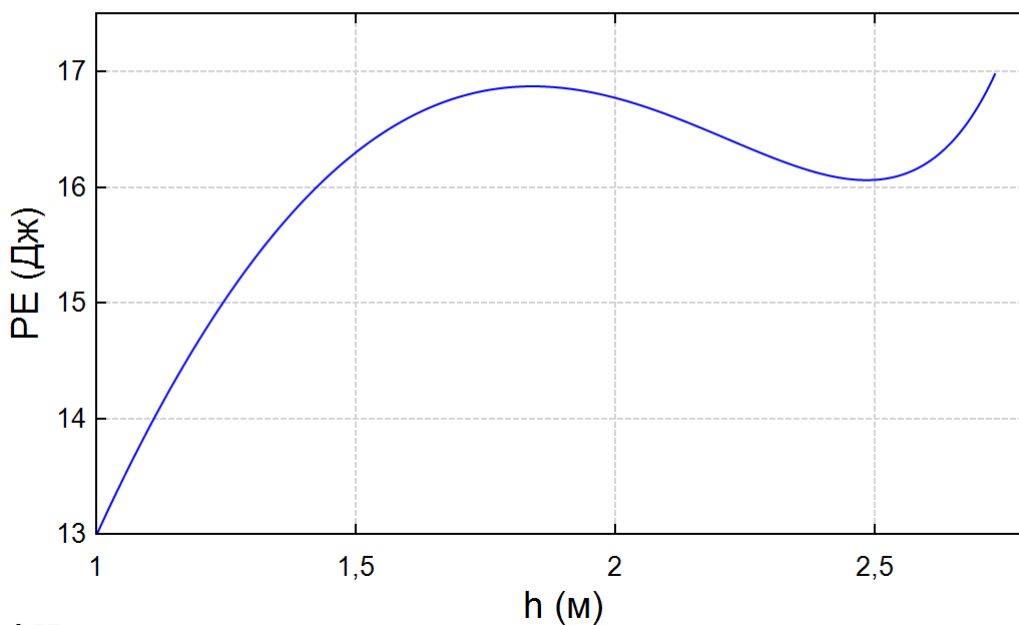
$$PE\left(1 \text{ м}; 6,5 \frac{\text{Н}}{\text{м}}\right) = 13 \text{ Дж}$$

Рис. 2.4. Формула потенциальной энергии трех цилиндров, стянутых резинкой

На рисунке 2.5 показан график изменения потенциальной энергии нашей механической системы с некой потенциальной ямой – с локальным минимумом суммы энергий. Как догадывается читатель, коэффициент  $k$  (6.5 ньютонов на метр) был подобран так, чтобы у данной кривой появился локальный минимум, а правый конец кривой был несколько выше локального максимума.

$$h_{max} := r \cdot (\sqrt{3} + 1) = 2,7321 \text{ м}$$

$$h := \left[ r; r + \frac{h_{max} - r}{300} \dots h_{max} \right] \quad hPE := \text{augment} \left( h; \overrightarrow{PE\left(h; 6,5 \frac{\text{Н}}{\text{м}}\right)} \right)$$



$hPE$

Рис. 2.5. График изменения потенциальной энергии трех цилиндров, стянутых эластичной резинкой (вариант 1)

## Глава 2

Итак. Три цилиндра с радиусом  $r$  в один метр и массой  $m$  в один килограмм<sup>2</sup> стянуты резинкой с коэффициентом жесткости  $k$ , равным шести с половиной ньютонов на один метр, и выложены на стол так, как показано на рис. 2.2. Затем мы медленно приподнимаем средний цилиндр (увеличиваем значение  $h$ ) и помещаем его в локальный максимум. Здесь цилиндр будет находиться в метастабильном неподвижном состоянии. Малейшее внешнее воздействие (легкий удар по столу, например) может вернуть цилиндр на стол ( $h = r$ ), либо... превратить его в своеобразный маятник, который станет «перекатываться» около локального минимума. Скорость затухания такого маятника будет зависеть от сил трения, которыми в нашем мысленном эксперименте мы пренебрегаем.

Можно поступить по-иному. Переместить средний цилиндр почти на правый край кривой ( $h = h_{max}$ ) и отпустить его. Если мы поднимем цилиндр выше точки локального максимума, то цилиндр «перекатится» через этот максимум и упадет на стол. Если же цилиндр будет поднят не так высоко, то он станет вести себя как маятник – будет «перекатываться с боку на бок» около локального минимума.

Но если коэффициент упругости  $k$  стягивающей резинки уменьшать, то маятника мы не получим. Средний цилиндр после того, как его приподнимут, «скатится» вниз на стол по кривой, показанной на рис. 2.6. На этой кривой также есть метастабильная точка, но это не локальный максимум или минимум, а точка перегиба, координаты которой несложно найти через численное решение системы двух уравнений с двумя неизвестными (рис. 2.6 – равенство нулю первой и второй производных функции потенциальной энергии). В этой точке средний цилиндр будет неподвижен, но «удар по столу» заставит его скатиться вниз.

---

<sup>2</sup> Эти значения, конечно, условные. Но сразу вспоминается старый метрологический анекдот. Диалог на экзамене. Преподаватель: – Что такое лошадиная сила? Студент: – Это сила, какую развивает лошадь ростом в один метр и весом в один килограмм. – Да где же вы такую лошадь видели!? – А её так просто не увидишь. Она хранится в Париже, в Палате мер и весов.

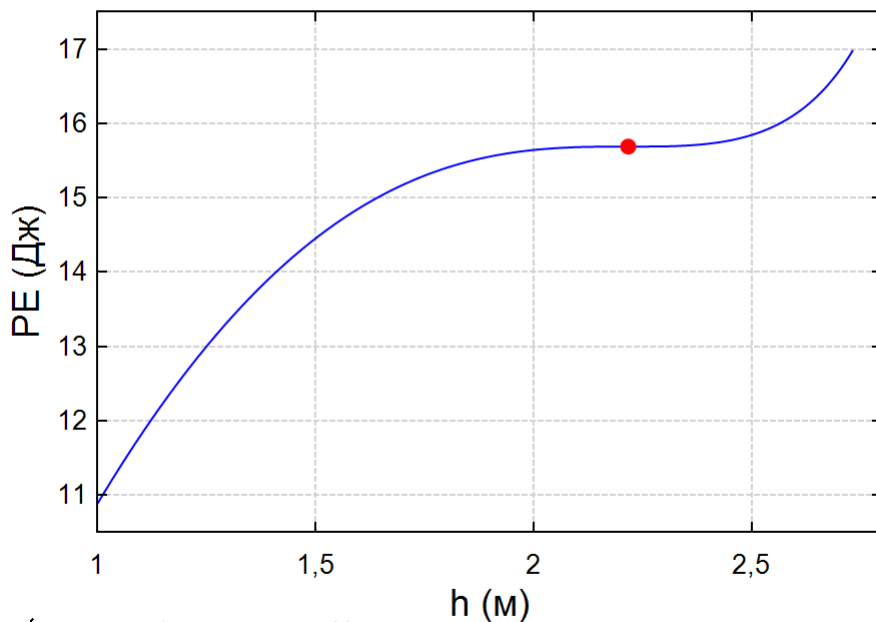
Вариант ответа современного школьника – жертвы ЕГЭ и рекламы, еще больше шокирующий преподавателя: лошадиная сила – это... шампунь.

## Глава 2

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ k_1 \end{bmatrix} := \text{roots} \left( \left[ \begin{array}{l} \frac{d}{d h} PE(h; k) = 0 \frac{\text{Дж}}{\text{м}} \\ \frac{d}{d h} \frac{d}{d h} PE(h; k) = 0 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2} \end{array} \right]; \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \frac{\text{м}}{\text{м}} \\ 7 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \end{bmatrix} \right)$$

$$h_1 = 2,2166 \text{ м}$$

$$k_1 = 5,4457 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{augment} \left( h; \overrightarrow{PE(h; k_1)} \right) \\ \left[ h_1 \text{ } PE(h_1; k_1) \text{ " " } 7 \text{ "red"} \right] \end{array} \right.$$

Рис. 2.6. Расчет точки перегиба на кривой потенциальной энергии и график изменения потенциальной энергии трех цилиндров, стянутых эластичной резинкой (вариант 2)

Производной второго и выше порядков в среде SMath нет, поэтому мы взяли первую производную от первой производной.

Если же резинка будет достаточно жесткой (рис. 2.7 –  $k$  равно 1000 ньютонов на метр), то три цилиндра, лежащие на столе, также будут находиться в метастабильном состоянии. Но «легкий удар по столу стянет цилиндры в пирамиду, показанную на рис. 2.1. При этом средний шар необязательно должен оказаться наверху. Один из крайних шаров может начать подниматься первым, и вся конструкция перевернется набок.

## Глава 2

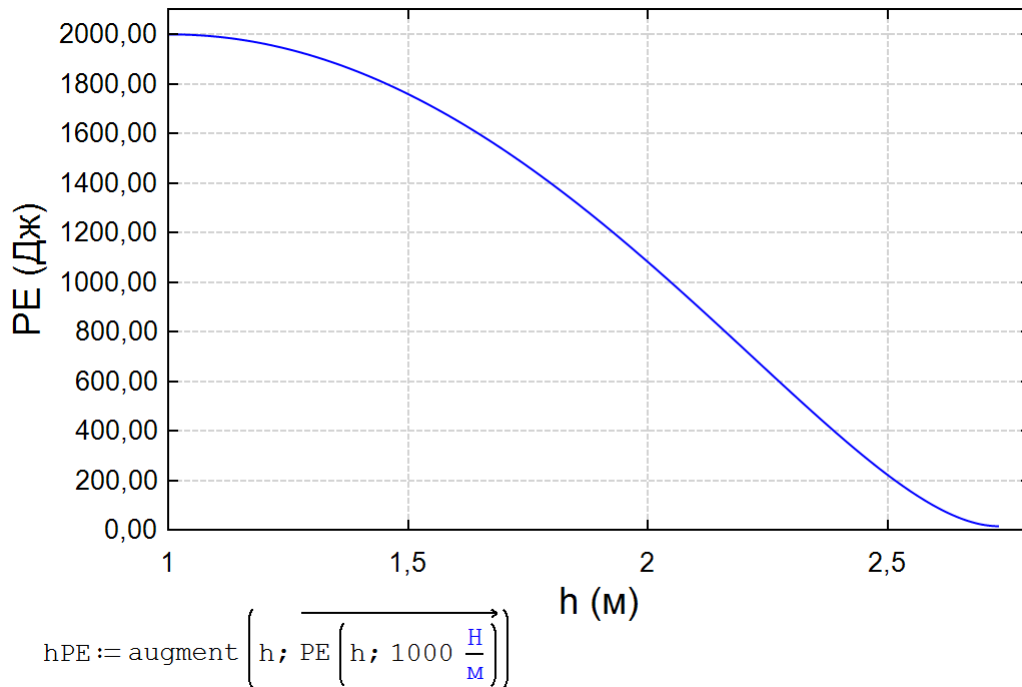


Рис. 2.7. График изменения потенциальной энергии трех цилиндров, стянутых жесткой резинкой (вариант 3)

Несложно доказать, что на концах кривой, показанной на рис. 2.7, производные равны нулю.

Из задачи можно убрать «физику», оставив только «математику». Для этого переменные  $m$ ,  $g$  и  $r$  нужно сделать безразмерными и присвоить им единичные значения<sup>3</sup> – см. рис. 2.8.

Получится довольно простая функциональная зависимость, которую можно анализировать методами символьной, а не численной математики и находить выражения для точек минимума, максимума и точки перегиба. А для начала можно построить семейство кривых с абсциссой  $h$  при разных значениях  $k$ .

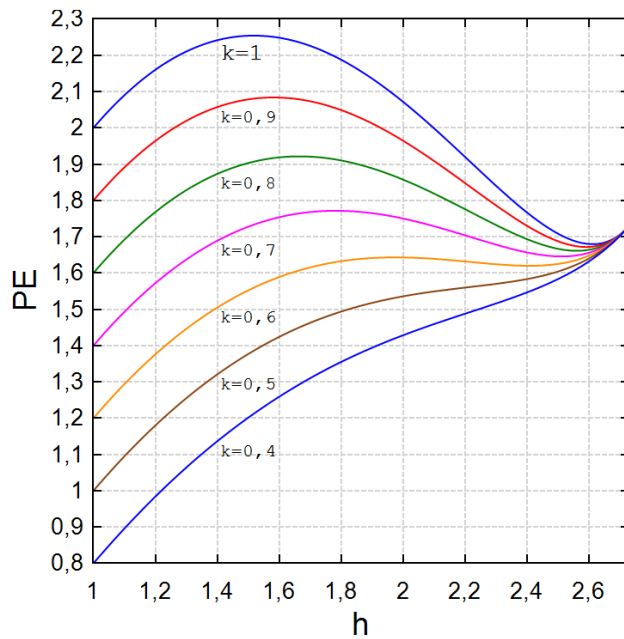
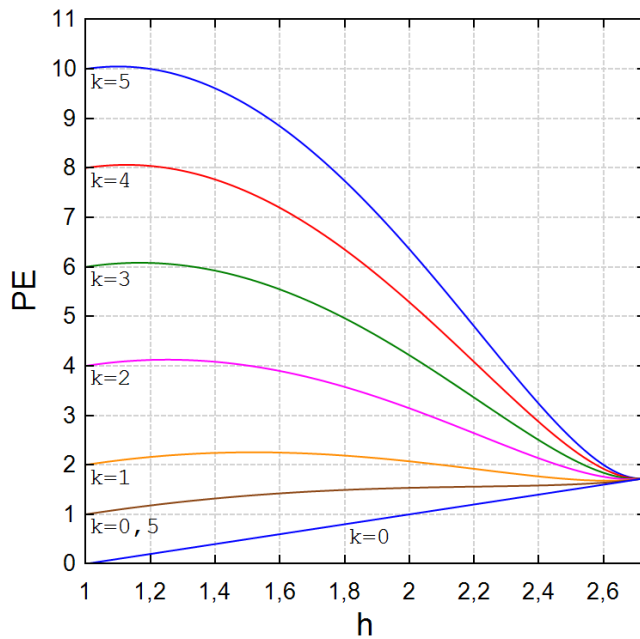
Из графиков видно, что точка локального максимума (первой метастабильной точки) при увеличении значения  $k$  будет приближаться к единице (левый край графика), а точка перегиба (вторая метастабильная точка) – к правому краю графика, т.е. к максимальному значению  $h$ , равному корню из трех плюс единица.

<sup>3</sup> Присвоение радиусу и массе единичных значений не вызывает вопросов (см. также сноску 2). Но вот единица для ускорения свободного падения может кого-то смутить. Поясняем! Физическая первооснова метра – это длина маятника, период колебания которого равен двум секундам [2]. Но можно было задать метр и так: метр – это такое расстояние, при котором ускорение свободного падения на поверхности земли равно одному метру, деленному на секунду в квадрате. В школах, кстати, на уроках физики для облегчения расчетов рекомендуют округлять  $g$  до 10. Мы тоже можем в нашем преобразовании на рис. 8 переменной  $g$  присвоить десятку, но характер кривых это не поменяет.

## Глава 2

$$\begin{aligned}
 m &:= 1 & & = -1 + h + 2 \cdot k \cdot \left( -1 + \sqrt{4 - (-1 + h)^2} \right)^2 \\
 g_3 &:= 1 \\
 r &:= 1 \\
 PE_D &:= m \cdot g_3 \cdot (h - r) \\
 PE_B &:= \begin{cases} l := \sqrt{(2 \cdot r)^2 - (h - r)^2} \\ L := 2 \cdot (l + \pi \cdot r + 2 \cdot r) \\ \Delta L := L - 2 \cdot r \cdot (3 + \pi) \\ k \cdot \frac{\Delta L^2}{2} \end{cases} \\
 PE_D + PE_B &
 \end{aligned}$$

$$PE(h; k) := h + 2 \cdot k \cdot \left( -1 + \sqrt{4 - (-1 + h)^2} \right)^2 - 1$$





## Глава 2

Рис. 2.8. Упрощение функции потенциальной энергии с показом семейства кривых

Задача, описанная в главе, хороша тем, что её несложно отобразить на простом физическом опыте – см. рис. 2.9, где показаны три фотографии алюминиевых банок, стянутыми резинками – одной, двумя и тремя.

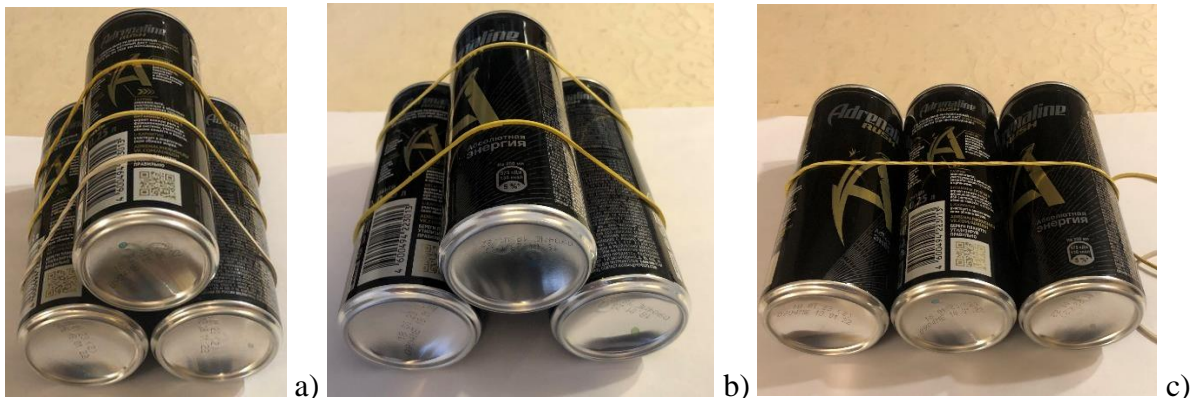


Рис. 2.9. Фотографии трех банок, отображающими три вышеописанные стабильные случая стягивания резинкой окружностей: а) три резинки (см. рис. 2.1), б) две резинки (см. рис. 2.3), в) одна резинка (см. рис. 2.2)

Если банки, резинки и поверхность стола хорошо смазать маслом, то можно постараться получить реальный вышеописанный маятник (осциллятор). При этом неплохо бы сделать так, чтобы резинки находились в неких круговых желобках банок и не соприкасались с поверхностью стола.

Полушутливая ремарка. В банках на рис. 2.9 хранятся не простые напитки, а *энергетические* напитки – это так называемые энергетика. На банках видна надпись (слоган) «Абсолютная энергия». Можно предположить, что в первой банке хранится «абсолютная» кинетическая энергия, во второй – «абсолютная» потенциальная энергия приподнятой средней банки, а в третьей – «абсолютная» потенциальная энергия растянутой резинки. Шутки шутками, но при колебании нашего маятника эти энергии будут переходить из одной формы в другую, но их сумма должна оставаться постоянной. Это без учета потери энергии на трение. Постоянство суммы энергий или плавное уменьшение этой суммы – это один из критериев правильности созданной математической модели нашего нового маятника.

Можно взять более трех цилиндров, стянуть их резинкой и посмотреть, как будет вести себя эта связка, если её положить на стол.

А теперь давайте поднимемся к началу главы – к эпиграфу!

Нашу задачу можно перевести из плоскости в объем: взять не цилиндры, а «гладкоповерхностные» шары (рис. 2.10) и обтянуть их не резинкой, а эластичной пленкой. Пленка пусть будет прозрачной, а лучше совсем невидимой.

Если пленка будет достаточно жесткой, то шары выстроятся в пирамиду, показанную на рис. 2.10 (см. также рис. 2.1). Если же пленка будет достаточно эластичной, то красный шар опустится на стол, раздвинув белые шары (см. рис. 2.2). Следует ожидать, что при определенной промежуточной эластичности пленки вся эта объемная конструкция поведет

## Глава 2

себя как маятник. Здесь, правда, нужно будет принять меры, чтобы нижние шары, лежащие на столе, раздвигались строго прямолинейно в нужные стороны. Для этого необходимо сделать так, чтобы нижние шары катались в неких желобках, проделанных на поверхности стола.



Рис. 2.10. Одиннадцать шаров в прозрачной пленке

Кроме того, можно исследовать систему с разными радиусами окружностей и шаров.

Упругость резинки и пленки сильно зависит от температуры. Нагревая или охлаждая наши цилиндры и шары, стянутые резинкой или пленкой, можно получить все вышеописанные случаи.

Коллега авторов И.Е. Васильева вывела дифференциальное уравнение, решение которого дает периодические функции изменения положения центра среднего цилиндра во времени. При его составлении были учтены геометрия системы трех цилиндров с резинкой, второй закон Ньютона и то положение, что полная энергия системы, состоящая из суммы двух потенциальных энергий (энергии приподнятого среднего шара и энергия растянутой резинки), а также кинетической энергии всех трех цилиндров, остается постоянной. Если учитывать трение, то эта сумма будет уменьшаться за счет диссипации энергии, превращения ее в тепло. Кроме того, можно и нужно будет учитывать явление гистерезиса периодически растягиваемой резинки – изменение во времени её жесткости.

Без учета сил трения дифференциальное уравнение с начальными условиями имеет следующий вид (рис. 2.11).

$$y(0) = 1 \quad m \quad y'(0) = 0 \quad \frac{m}{s}$$

$$\frac{2 \cdot m \cdot (4 \cdot r^2 + y(t)^2) \cdot y''(t)}{2 \cdot y(t)^2 - 8 \cdot r^2} = g \cdot m - 2 \cdot k \cdot \left( 2 \cdot y(t) - \frac{2 \cdot r \cdot y(t)}{\sqrt{4 \cdot r^2 - y(t)^2}} \right) + \frac{4 \cdot m \cdot y(t) \cdot (y'(t))^2 \cdot (4 \cdot r^2 + y(t)^2)}{(2 \cdot y(t)^2 - 8 \cdot r^2)^2} - \frac{2 \cdot m \cdot y(t) \cdot (y'(t))^2}{2 \cdot y(t)^2 - 8 \cdot r^2}$$

Рис.2.11. Нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с начальными условиями колебания среднего (верхнего) цилиндра (см. рис. 2.3)

## Глава 2

Листинг программы решения дифференциального уравнения в среде Mathcad [4] и графики численного решения колебания среднего (верхнего) цилиндра изображены на рис.2.12.

$$r := 1 \text{ m} \quad m := 1 \text{ kg} \quad k := 0.65 \text{ m} \cdot \frac{\text{g}}{\text{r}} = 6.374 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad t_{\text{end}} := 10 \text{ s}$$

Solve

$y(0 \text{ s}) = 1 \text{ m} \quad y'(0) = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

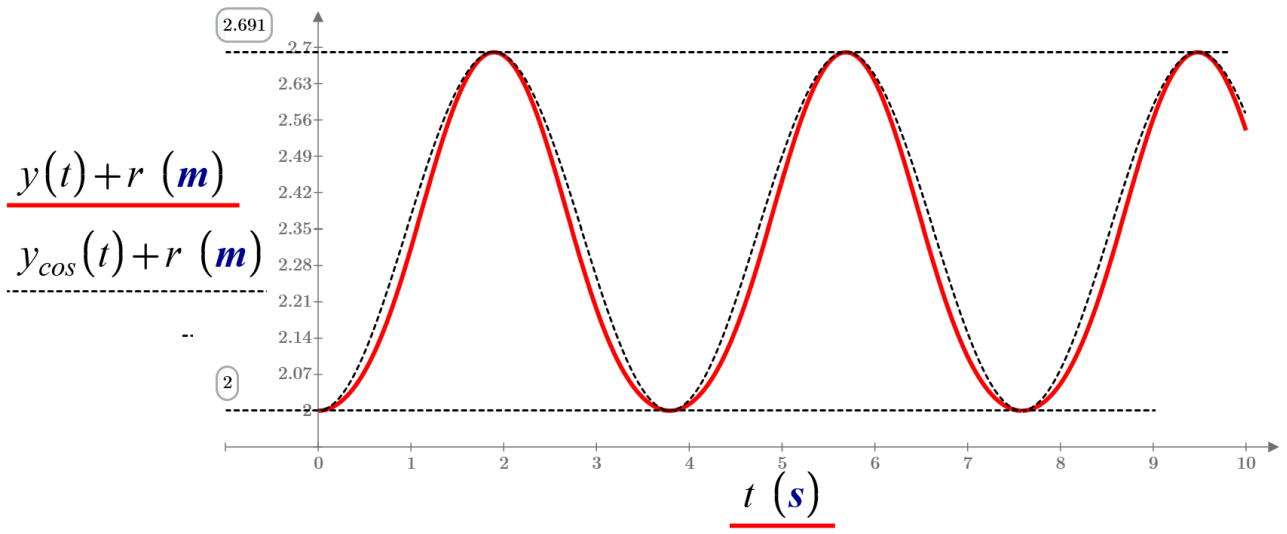
$$\frac{2 \cdot m \cdot (4 \cdot r^2 + y(t)^2)}{2 \cdot y(t)^2 - 8 \cdot r^2} \cdot y''(t) = g \cdot m \downarrow + \left( -2 \cdot k \cdot \left( 2 \cdot y(t) - \frac{2 \cdot r \cdot y(t)}{\sqrt{4 \cdot r^2 - y(t)^2}} \right) \right) \downarrow$$

$$+ \frac{4 \cdot m \cdot y(t) \cdot (y'(t))^2 \cdot (4 \cdot r^2 + y(t)^2)}{(2 \cdot y(t)^2 - 8 \cdot r^2)^2} - \frac{2 \cdot m \cdot y(t) \cdot (y'(t))^2}{2 \cdot y(t)^2 - 8 \cdot r^2}$$

$y := \text{Odesolve}(y(t), t_{\text{end}})$

Constrains

Solver



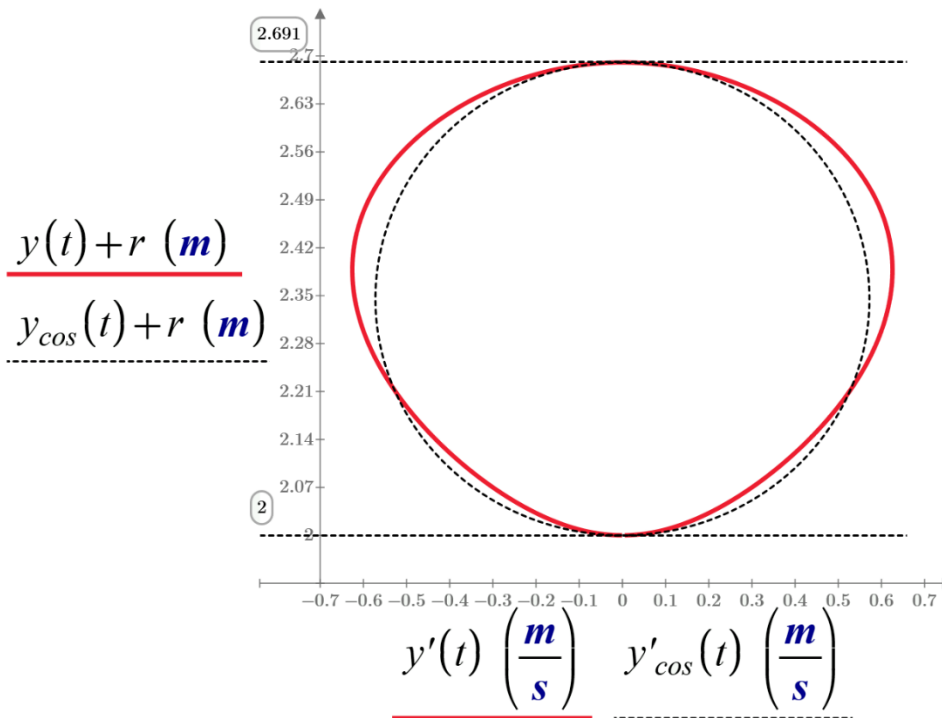
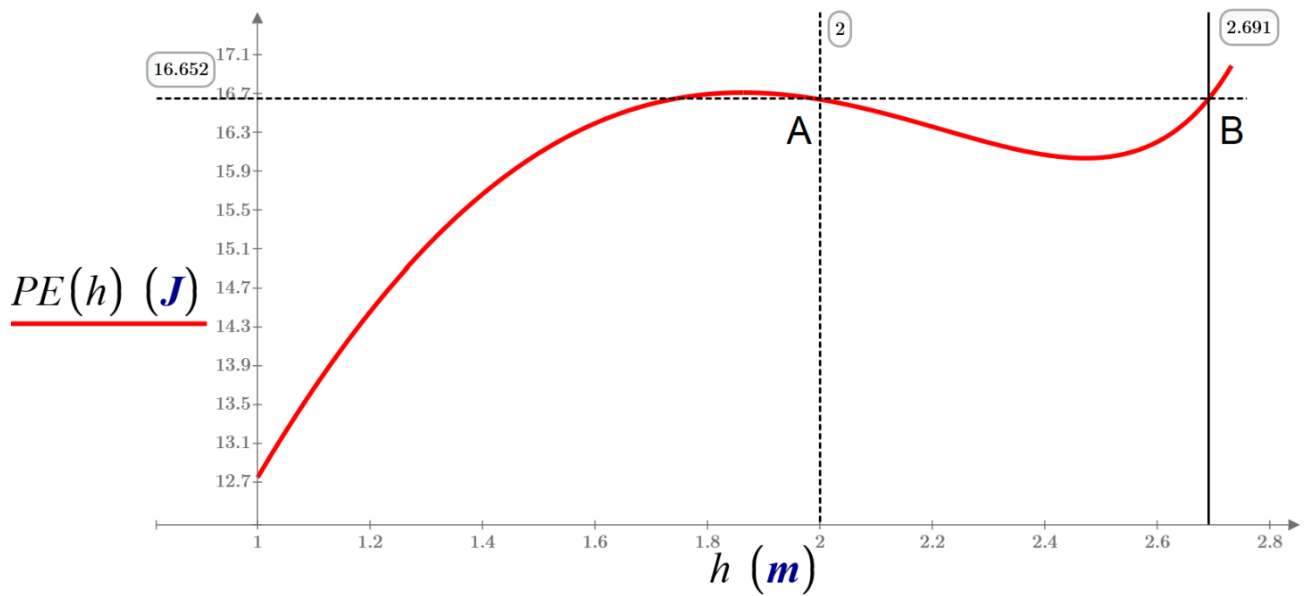


Рис.2.12. Листинг программы решения уравнения, численное решение колебания среднего (верхнего) цилиндра и его изображение в фазовой плоскости. Пунктир – изображение синусоиды в фазовой плоскости.

Технология решения обыкновенных дифференциальных уравнений в среде SMath описана в главах 6, 7 и 8.

График изменения потенциальной энергии колеблющегося цилиндра (рис. 2.12) в зависимости от высоты его подъема изображен на рис.2.13.



## Глава 2

Рис.2.13. График изменения потенциальной энергии колеблющегося цилиндра (рис. 2.12) в зависимости от высоты его подъема: А и В – точки максимального подъема

Если рисунок 2.3 перевернуть вверх ногами, то можно увидеть новое стилизованное изображение сердца с тремя желудочками-окружностями. Если создать анимацию изменения во времени положений этих «желудочков», то можно увидеть биение этого сердца. На сердце, кстати, похожа замкнутая сплошная кривая на рис. 2.12 (фазовый портрет решения дифференциального уравнения). Замкнутую пунктирную кривую можно было бы назвать окружностью, если бы на осях были величины одной размерности. Но формально это окружность. Первая же волнообразная кривая (график изменения высоты среднего цилиндра во времени) – это, можно сказать, некая кардиограмма такого сердца.

Более будут походить на сердце четыре шара, стянутые эластичной пленкой в некое подобие конуса (рис. 2.10). Кстати, реальное конусообразное сердце человека имеет именно четыре полости – два предсердия и два упомянутых желудочка.

Все это и позволило добавить лирику в физику – дать нашему осциллятору имя «маятник-сердце». Лиричненько и даже романтичненько!

Обсуждение данной задачи, приведшей к идее нового маятника-сердца, можно просмотреть здесь [5]. Выражаем признательность участникам этой дискуссии. Там же можно просмотреть и анимации колебания нашего нового маятника (осциллятора), а также скачать соответствующие расчетные файлы. SMath-файл решения дифференциального уравнения «биения» маятника-сердца можно скачать с сайта книги.

### Задание читателю

1. Воспроизвести расчеты главы
2. Реализовать в среде SMath решение дифференциального уравнения, показанного на рис. 2.11.
3. Реализовать в среде SMath колебание 3D-маятника-сердца (см. рис. 2.10).

### Литература и ссылки:

1. Очков В. Ф., Тихонов А. И. и 7 студентов МЭИ. Математика и новые информационные технологии // Математическое образование. № 1, 2021 (<http://www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/Geometry-IT.pdf>)
2. В. Ф. Очков, В. Л. Чудов, К. Писасич, Н. Г. Герасимов, Е. В. Никульчев. Три нелинейности маятника, или Улыбка фазового портрета // Cloud of Science. 2020. Т. 7 С. 6–39 (<http://www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/Pendulum.pdf>)
3. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике: Учебное пособие для вузов / Под ред. Е. С. Пятницкого. — 3-е изд. — М.: Физматлит, 2005. — 264 с. ([https://www.studmed.ru/gantmaher-fr-lekcii-po-analiticheskoy-mehanike\\_98f223dc7f3.html](https://www.studmed.ru/gantmaher-fr-lekcii-po-analiticheskoy-mehanike_98f223dc7f3.html))
4. Очков В.Ф., Богомолова Е. П., Иванов Д. А. Физико-математические этюды с Mathcad и интернет. Издательство Лань. 2018 (<http://www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/T-2018/PhysMathStudies.pdf>)
5. <https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/New-problem-with-circles/td-p/780229>