

**ЦЕПОЧКА НА ЦИЛИНДРЕ: ЧИСЛО, СИМВОЛ, ГРАФИК**

В статье приводится решение задачи о параметрах замкнутой цепочки (без кулона и кулоном), накинутой на горизонтальный цилиндр. Решение сводится к численному поиску корня системы трансцендентных уравнений и к минимизации с ограничениями.

Дано описание сценария занятия в школе и вузе по образовательной технологии STEM (Science-Technology-Engineering-Mathematics).

**1. Задача** (цепочка без кулона): на горизонтальный цилиндр радиусом  $R$  накинута замкнутая цепочка длиной  $L$  (см. рис. 1). Определить форму провисания цепочки, длина которой, естественно, больше длины окружности цилиндра:  $L > 2\pi R$ .

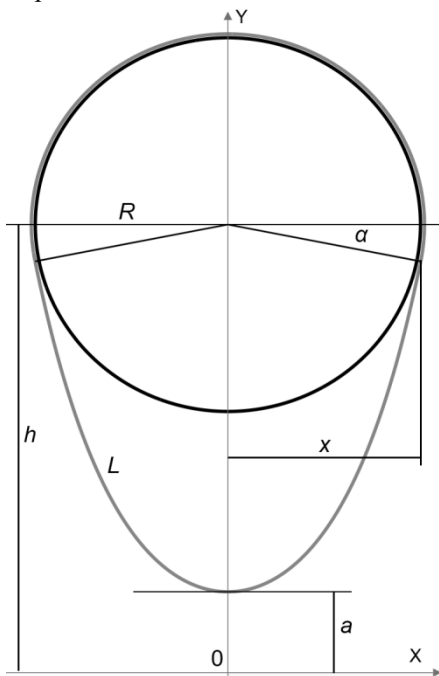


Рис. 1 Схема задачи о цепочке на цилиндре.

Эта задача привлекательна и тем, что ее можно сформулировать не только словами, но и физически. Для этого достаточно прикрепить к доске в классе или студенческой аудитории цилиндрический диск (как нашлепку на холодильник), накинуть на него замкнутую цепочку, сфотографировать на цифровую камеру провисание цепочки, оцифровать изображение, обработать его на компьютере, а затем сравнить «цифру» с тем, что получится при математическом моделировании провисания цепочки (сравнить реальный объект с его цифровым двойником). Это будет прекрасная лабораторная работа по образовательной технологии STEM в компьютеризированном школьном или вузовском физическом кабинете (см. конец статьи).

На рис. 1 показана схема задачи. В качестве начала координат выбрана точка, с нулевой абсциссой и отстоящая от центра окружности вниз на расстояние  $h$ . Важным параметром поиска будет и угол  $\alpha$  – угол, при котором цепочка отрывается от цилиндра.

В последнее время такие задачи все чаще и чаще решаются не аналитически («математический подход к решению» [1, 2]), а численно («инженерный подход» [3, 4]) с привлечением математических компьютерных программ – пакета Mathcad, например. Как в этой статье. И тому есть причины и оправдания. Аналитическое (символьное) решение зачастую оказывается неприемлемо громоздкими, требует особого математического таланта, знаний и навыков, которых многим не хватает. Кроме того, аналитический подход нацелен на общее решение задачи. И из-за этого он часто терпит фиаско. Но даже если решение будет найдено, то оно часто оказывается слишком трудным для понимания теми, кто «не обладает особыми математическими талантами, знаниями и навыками». А этот аспект очень важен в сфере образования, где цель (решение задачи, ответ) — ничто, а движение (путь к решению) – все.

Численные методы, получившие широкое распространение в последние десятилетия вследствие бурного развития вычислительной техники, позволяют довольно просто решать сложнейшие задачи. И решение это понятно широкому кругу людей, а не только избранным. Главное тут не забывать о недостатках численных методов, о накоплении ошибок вычислений и проч.

Читатель может попытаться решить задачу о цепочке на цилиндре аналитически, а потом сравнить его с численным, вернее гибридным решением (сочетание символьных и численных методов), приведенным ниже. На сайте статьи можно увидеть проект ордена с цепью тому, кто решит эту задачу аналитически – найдет формулу, по которой рассчитывается угол  $\alpha$  в зависимости от отношения  $L$  к  $R$ . Орден тут упо-

мянут неслучайно. Представьте себе такую ситуацию: человеку вручают орден, и он наклоняется, чтобы ему этот орден повесили на шею. Другая более обыденная ситуация – человек с цепочкой на шее наклонился, чтобы поднять что-то с полу. Так что с этой задачей приходится сталкиваться довольно часто.

На рис. 2 показано, как в среде пакета Mathcad задаются шесть функций, необходимых для решения задачи.

$$\begin{aligned}
 F_c(x, a) &:= a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) && \text{Цепная линия} \\
 F'_c(x, a) &:= \frac{d}{dx} F_c(x, a) \rightarrow \sinh\left(\frac{x}{a}\right) && \text{Производная цепной линии} \\
 S_c(x, a) &:= \int_{-x}^x \sqrt{1^2 + F'_c(x, a)^2} dx && \text{Длина цепной линии} \\
 F_o(x, R, h) &:= h - \sqrt{R^2 - x^2} && \text{Нижняя полуокружность} \\
 F'_o(x, R) &:= \frac{d}{dx} F_o(x, R, h) \rightarrow \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} && \text{Производная нижней} \\
 &&& \text{полуокружности} \\
 S_o(x, R) &:= \left\| \begin{array}{l} \alpha \leftarrow \arccos\left(\frac{x}{R}\right) \\ R \cdot (\pi + 2\alpha) \end{array} \right\| && \text{Длина части цепочки,} \\
 &&& \text{лежащей на цилиндре}
 \end{aligned}$$

Рис. 2 Вспомогательные функции задачи о цепочке на цилиндре

Каноническая формула цепной линии, прописанная во всех бумажных и электронных математических справочниках и учебниках, такая  $a \cosh(x/a)$ . Она имеет минимум (провисающая цепь:  $a > 0$ ) или максимум (арка:  $a < 0$ ) в точке с абсциссой, равной нулю и ординатой, равной  $a$  (см. рис. 1). Значение этого параметра цепной линии ( $a$  это и ее некая «крутизна») нужно будет найти в процессе наших расчетов. Еще одна неизвестная — это переменная  $x$ : абсцисса точки отрыва цепочки от цилиндра (см. рис. 1). Таких точек две, но они симметричны относительно оси ординат.

Формула для длины цепочки, соприкасающейся с цилиндром (функция  $S_o$ ), задается не через определенный интеграл (мы это сделали для цепной линии), а через нахождение значения локальной переменной  $\alpha$  и расчета длины дуги окружности.

*Примечание.* Формула длины плоской кривой во всех справочниках (см., например, [https://en.wikipedia.org/wiki/Arc\\_length](https://en.wikipedia.org/wiki/Arc_length)) дается с «ошибкой» – везде стоит под корнем просто единица, а должна стоять... единица в квадрате. «Какая разница, товарищ?» Единица равна единице в квадрате! Ан, нет! Квадрат у единицы позволяет понимать, что в этой формуле спрятана теорема Пифагора: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов!

И еще одно замечание. Определенный интеграл, задающий длину цепной линии от  $-x$  до  $x$ , «так и просится», чтобы его упростили через нахождения первообразной. Такую работу сейчас все чаще и чаще делают не на бумаге и не в уме, а в... Интернете – см. рис. 3.

**WolframAlpha** computational intelligence.

integral sqrt(1+sinh(x/a)^2) dx from x1 to x2

Input:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)} dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)} dx$$

Standard computation time exceeded... Try again with Pro computation time

integral sqrt(1+sinh(x/a)^2) dx

Indefinite integral:

$$\int \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)} dx = a \sqrt{\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)} \tanh\left(\frac{x}{a}\right) + \text{constant}$$

Рис. 3. Интернет-поиск первообразной функции.

Определенный интеграл портал WolframАльфа не взял и отослал посетителя к платной версии портала (Pro). Но если порталу «подсунуть» неопределенный интеграл, то задача будет решена – см. последнюю строку на рис. 3. После этого достаточно вспомнить основную теорему математического анализа – теорему Ньютона-Лейбница и получить нужную формулу длины цепной линии от  $-x$  до  $x$ :  $2a \cosh(x/a)$ . Но в

нашем расчете мы оставили исходную формулу с определенным интегралом. Во-первых, она более уместна в смысле понимания сути задачи, а во-вторых, мы все равно решаем задачу численно. Отказ от интеграла и переход к упрощенной формуле будет уместен при попытках аналитического решения задачи.

На рис. 4 показано продолжение нашего Mathcad-расчета: ввод исходных данных и расчет важного параметра задачи – отношение длины цепочки  $L$  к длине окружности цилиндра  $2\pi R$ , на который цепочка накинута. Этот параметр может меняться от единицы (цепочка плотно облегает цилиндр:  $\alpha = 90^\circ$  – см. рис. 1) до бесконечности (плети цепочки провисают у окружности почти вертикально:  $\alpha = 0$ ).

$$\begin{array}{r}
 R \\
 (m) \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 L \\
 2\pi \cdot R + 2\ m \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2\pi \cdot R = 6.283\ m \\
 L = 8.283\ m
 \end{array}
 \quad
 \frac{L}{2\pi \cdot R} = 1.318$$

Рис. 4. Исходные данные задачи о цепочке на цилиндре.

Решение задачи сводится к численному поиску корня системы трех трансцендентных уравнений. Эта операция в среде Mathcad (блок **Решить**) показана на рис. 5: задаются разумные начальные приближения к решению, вводятся ограничения (это уравнения в данном случае, но там могут быть и неравенства) и вызывается встроенная в Mathcad функция **Find**, которая возвращает численные значения своих аргументов, превращающих уравнения в тождества. Вернее, почти в тождества, когда левые и правые части уравнений отличаются на незначительную величину. Численные методы решения задач имеют и другое название – приближенные методы.

Уравнения же такие:

длина замкнутой цепочки  $L$  остается постоянной и складывается из двух частей: лежащей на цилиндре ( $S_0$ ), а также провисающей части ( $S_c$ );

замкнутая линия, описывающая форму цепочки, охватывающей цилиндр (см. рис. 1), неразрывна ( $F_0 = F_c$  в точке отрыва цепочки от окружности);

эта замкнутая линия гладкая ( $F'_0 = F'_c$  в точке отрыва цепочки от окружности).

Начальные приближения	Решить	$\begin{bmatrix} x \\ a \\ h \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0.9 R \\ 0.5 m \\ 2 m \end{bmatrix}$
	Ограничения	$S_o(x, R) + S_c(x, a) = L$
$F_o(x, R, h) = F_c(x, a)$		
Решатель		$F'_o(x, R) = F'_c(x, a)$
		$\begin{bmatrix} x \\ a \\ h \end{bmatrix} := \mathbf{Find}(x, a, h) = \begin{bmatrix} 0.98698 \\ 0.39259 \\ 2.60187 \end{bmatrix} m$

$$\alpha := \arccos\left(\frac{x}{R}\right) = 9.255^\circ$$

Рис. 5. Решение задачи о цепочке на цилиндре.

На рис. 6 можно видеть графическое отображение решения задачи о цепочке на цилиндре для разных соотношений длин замкнутой цепочки и окружности цилиндра, на который цепочка накинута.

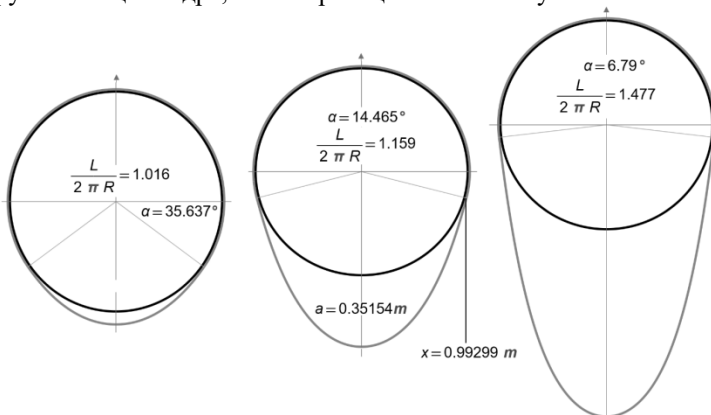


Рис. 6. Графическое отображение решения задачи о цепочке на цилиндре.

Давайте теперь на цепочку подвесим кулон (или орден – см. выше) и посмотрим, как она будет провисать на цилиндре.

В новой задаче у нас будет не одна, а две цепных линии, сдвинутых влево и вправо от оси ординат на расстоянии  $\Delta x$  – см. рис. 7. Кроме того, начало координат перенесено в центр окружности.

$$F_c(x, a, h, \Delta x) := h + a \cdot \cosh\left(\frac{x + \text{if}(x \geq 0, m, \Delta x, -\Delta x)}{a}\right) - a$$

$$F'_c(x, a, \Delta x) := \sinh\left(\frac{x + \text{if}(x \geq 0, m, \Delta x, -\Delta x)}{a}\right)$$

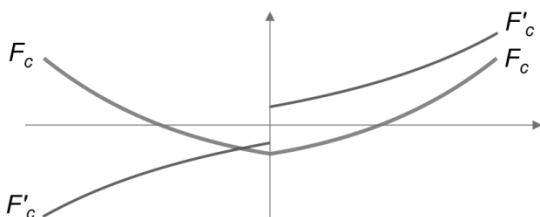


Рис. 7. Цепная функция с изломом.

Для решения этой задачи к исходным данным нужно добавить две константы и две функции:

удельную (линейную) массу цепочки  $m_c$ ; массу кулона  $m$  (значение ускорения свободного падения  $g$  вводить не нужно – эта величина встроена в Mathcad); функцию  $Y_{cg}$ , возвращающую ординату центра тяжести цепочки с кулоном (абсцисса этой точки равна нулю, т.к. задача о цепочке с кулоном остается быть симметричной относительно оси ординат); функцию  $PE$ , возвращающую потенциальную энергию цепочки с кулоном.

На рис. 8 показаны эти две дополнительные функции.

$$Y_{cg}(x_1, x_2, a, h, \Delta x) := \frac{\int_{x_1}^{x_2} F_c(x, a, h, \Delta x) \cdot \sqrt{1 + F'_c(x, a, \Delta x)^2} dx}{S_c(x_1, x_2, a, \Delta x)}$$

$$PE(x, a, h, \Delta x) := g \cdot S_c(-x, x, a, \Delta x) \cdot m_c \cdot Y_{cg}(-x, x, a, h, \Delta x) + g \cdot m \cdot F_c(0, m, a, h, \Delta x)$$

Рис. 8. Функции потенциальной энергии цепочки с кулоном.

Функция  $Y_{cg}$  имеет два аргумента  $x_1$  и  $x_2$ , а не один  $x$  (см. рис. 2). Такое изменение нацелено на развитие задачи, на решение и ассиметричных задач (см. задания в конце статьи).

В задаче о цепочке с кулоном появилась четвертая неизвестная величина  $\Delta x$  (см. рис. 7). А уравнений осталось три. Разрешить эту «недоопределенность» (три уравнения с четырьмя неизвестными) можно, заменив функцию **Find**, на функцию **Minimize** – см. рис. 9: задача сводится к минимизации потенциальной энергии цепочки с кулоном. Четвертое необходимое уравнение запрятано в функции потенциальной энергии.

Решить	
Начальные приближения	$\begin{bmatrix} x \\ a \\ h \\ \Delta x \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0.95 R \\ 0.7 m \\ -3 m \\ 0.7 m \end{bmatrix} \quad PE(x, a, h, \Delta x) = -1.257 J$
Ограничения	$S_o(-x, x, R) + S_c(-x, x, a, \Delta x) = L$ $F_o(x, R) = F_c(x, a, h, \Delta x)$ $F'_o(x, R) = F'_c(x, a, \Delta x)$
Решатель	$\begin{bmatrix} x \\ a \\ h \\ \Delta x \end{bmatrix} := \text{Minimize}(PE, x, a, h, \Delta x) = \begin{bmatrix} 0.97136 \\ 0.71686 \\ -2.53757 \\ 0.54537 \end{bmatrix} m$
	$PE(x, a, h, \Delta x) = -1.063 J \quad \alpha := \arccos\left(\frac{x}{R}\right) = 13.746^\circ$

Рис. 9. Решение задачи о цепочке с кулоном на цилиндре.

На рис. 10 показано графическое отображение решения задачи цепочке с кулоном, накинутой на цилиндр, при разных значениях массы кулона: 1 кг, 20 граммов и 0 (цепочка без кулона). На рис. 10 можно видеть пунктир цепной линии – продолжение реальной цепочки без излома. На левом рисунке цепная линия – это почти прямая линия: тяжелый груз вытягивает цепочку в струну. На среднем рисунке видны ми-



нимумы цепных линий при  $x = -0.632$  м и  $x = 0.632$  м. Правый же рисунок – это повторения рис. 6. Но две цепные линии не слились в одну из-за ограниченной точности численного метода решения задачи.

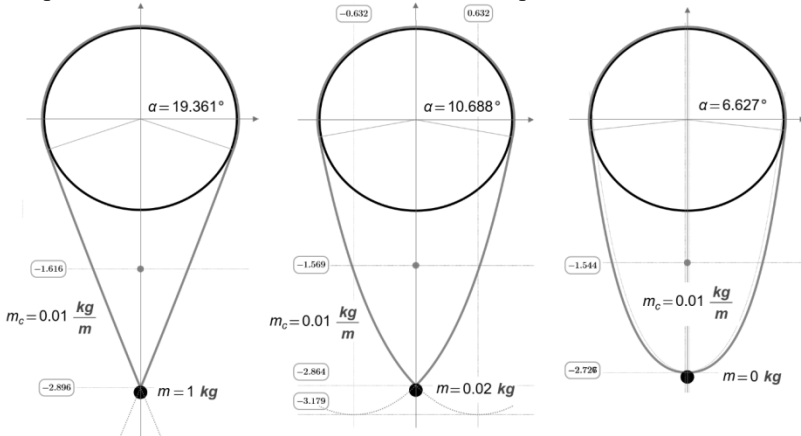


Рис. 10. Графическое отображение решения задачи о цепочке с кулоном на цилиндре.

Рис. 10 можно интерпретировать и так: с воздушного шара сбрасывают балласт, а потом от него совсем отрывается корзина. Тут мы имеем дело уже не с цепной линией, а с катеноидой – поверхностью, образуемой вращением цепной линии. Еще одна аналогия – мыльная пленка свисает с кольца, а в нижней ее части скопилась вода.

**Заключение.** Данная статья – это фактически некий план проведения занятия в школе или вузе по инновационной образовательной технологии STEM, когда на одном уроке с опорой на современные информационные технологии рассматриваются вопросы разных учебных дисциплин: математики, физики, теоретической механики, сопромата и т.д. Для российского читателя тут более привычными будут термины «междисциплинарные связи» и «когнитивное обучение». Аббревиатура STEM идет от слов *Наука (Science)*, *Технология (Technology)*, *Инженерное дело (Engineering)* и *Математика (Mathematics)*. Иногда сюда добавляют букву *A* — *Art, Искусство*: STEAM, а не STEM. Проблема гуманитаризации технического образования — это важный аспект в работе школы и вуза [5].

Слово *steam* по-английски это и водяной пар, который в начале XIX века произвел в мире первую промышленную (теплотехническую) ре-

волюцию: появились паровые машины, пароходы, паровозы... Технология обучения STEM/STEAM может способствовать развитию четвертой (цифровой) промышленной революции наших дней (Industry 4).

В немецком языке, кстати, в ходу другая аббревиатура, более точно обозначающая данную технологию обучения – MINT: M – *Mathematik*, I – *Informatik*, N – *Naturwissenschaft* (Естествознание) и T – *Technik*. Тут, как тому и положено, на первом месте стоит царица наук математика, получившая второе дыхание с развитием компьютерных символьных, численных и гибридных методов решения задач. Тандем математики и компьютера – это мощная база для нового этапа развития науки и техники. Слово *mint*, кстати, по-английски – это *мята*. Данная технология образования призвана *освежить* застоявшийся воздух в помещениях наших учебных заведений.

Слово *stem* по-английски означает и *стебель*, *ствол* (*stem cells* – стволовые клетки). В этом контексте STEM технологию образования можно считать неким стволом (каркасом), от которого отходят ветви отдельных учебных дисциплин – математики, физики, теоретической механики, сопротивления материалов и т.д. и т.п.

Дискуссии о роли компьютеров при освоении наук механико-математического плана часто вспыхивают в школах и вузах. Преподаватели тут высказывают крайние суждения на этот счет. Многие считают, что математику в школе и вузе нужно преподавать и осваивать сугубо «мелом на доске» и «ручкой на бумаге», и что компьютер тут может только навредить. Но тут приходится констатировать, что преподаватели, стоящие на такой крайней позиции, просто не освоили современные математические программы, а используют компьютер только для офисных целей: интернет, электронная почта, электронная книга, пишущая машинка, ведение электронного журнала... Девиз таких преподавателей: «Старую собаку новым фокусам не научишь!». Правда, они по понятным причинам этот девиз не афишируют и обосновывают свою позицию другими, более извинительными мотивами. Другие же преподаватели математики, физики, теоретической механики и др., освоившие компьютер до уровня своей специальности, используют его на занятиях наряду с «доской и мелом». И таких специалистов становится все больше и больше.

Второй вопрос, который присутствует в данной статье и прямо касается преподавания математики в школе и вузе таков: нужно ли уроки математики дополнять примерами из других дисциплин (из теоретической механики, например) или нужно преподавать сугубо чистую математику (с компьютером или без него), игнорируя прикладные задачи.

Ну и третье. В настоящее время процесс решения инженерных задач и задач математической физики сделал резкий крен от аналитических к численным методам (см. пример в этой статье). Но преподавание математики и физики в школе и в вузе по-прежнему базируется, в основном, на «аналитике», а не «цифре». Это также является темой дискуссий.

Недавно в СМИ промелькнуло сообщение о том, что в старших классах Финляндии отменили предметы. Теперь урок в школе заточен не на разбор и освоение положений отдельных учебных дисциплин, а на решение конкретной практической задачи, на исследование конкретного объекта с привлечением положений всех учебных дисциплин, изучаемых в школе. Если говорить о данной статье, то этот объект всем хорошо известная цепочка, в которой сплелись физика, математика, сопротивление материалов, гидрогазодинамика, теплообмен и т. д.

Опыт ведения занятий по технологии STEM будет расширяться по мере роста числа преподавателей нужной квалификации и соответствующих разработанных и апробированных задач.

Рассмотренная задача о цепочке без кулона хороша тем, что в ней не нужно учитывать силу трения между цепочкой и цилиндром. А вот задачи, в которых эту силу необходимо учитывать, пренебрегая ею в отдельных случаях:

На цепочку подвешено два, три и т. д. кулона разной массы. К исходным данным прибавляются длины отрезков цепочки с местами крепления смежных кулонов.

Цепочка имеет переменную удельную массу. Это, к примеру, нитка жемчуга с перлами разной величины [5].

Цилиндр с накинута на него цепочкой с кулоном начинается вращаться вокруг своей горизонтальной оси. Определить угол поворота цилиндра, при котором цепочка начнет соскальзывать с него. Дополнительно задается некий коэффициент трения.

Цилиндр отклоняется от горизонтального положения. Определить угол наклона цилиндра, при котором цепочка начнет соскальзывать с него.

Цилиндр отклоняется от горизонтального положения, но цепочка закреплена на нем. Как будут меняться контуры этой уже асимметричной конструкции?

Замкнутая цепочка (с кулоном и без него) накинута не на круглый цилиндр, а цилиндр с эллипсом в сечении. Цилиндр вращается вокруг своей горизонтальной оси. Как будет меняться форма цепочки. Можно опробовать и другие формы сечения горизонтального цилиндра.

Цепочку с кулоном или без кулона отклонить в сторону и отпустить в свободный полет. Как будет колебаться этот маятник?

Другие сценарии занятий по технологии STEM можно найти в [6, 7].

*Сайт с расчетными документами статьи:*

<https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/One-more-catenary/m-p/649328>.

## Литература

1. Меркин Д.Р. Введение в механику гибкой нити. М.: Наука, 1980.  
<https://dwg.ru/lib/1317>
2. Зубелевич О.Э., Самсонов В.А. Цепь на конусе // Сборник научно-методических статей. Теоретическая механика. Вып. 30. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2018. С. 131–138.
3. Очков В. Ф., Нори М., Очкова Н.А. Физико-математическая информатика с цепочкой // Cloud of Science. 2019. Т. 6, № 1. С. 5-47.  
[https://cloudofscience.ru/sites/default/files/pdf/CoS\\_21\\_005.pdf](https://cloudofscience.ru/sites/default/files/pdf/CoS_21_005.pdf)
4. Очков В. Ф., Попова К., Камалов М. Цепная линия // Физика для школьников. 2018. № 3. С. 24-32. [http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/fizika\\_dlya\\_shkolnikov\\_2018\\_03.pdf](http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/fizika_dlya_shkolnikov_2018_03.pdf)
5. Лесков Н.С. Жемчужное ожерелье. <https://www.youtube.com/watch?v=DZPxQF4bkiI>
6. Очков В.Ф., Богомолова Е.П., Иванов Д.А. Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет: Учебное пособие. 2-е изд., испр. и доп. СПб.: Издательство «Лань», 2018. <http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/T-2018/PhysMathStudies.pdf>
7. Ochkov V. 2<sup>5</sup> Problems for STEM Education. Chapman and Hall/CRC, 2020. <https://www.crcpress.com/2-Problems-for-STEM-Education/Ochkov/p/book/9780367345259>