ISSN 2221-1993 • **Информатика в школе** • 2015 • № 4 (107)

В. Ф. Очков,
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва,

К. Писачич,
Северо-хорватский университет, г. Вараждин, Хорватия

ПУТЕШЕСТВИЕ ИЗ ПЕТЕРБУРГА В МОСКВУ, ИЛИ СВЕТ В КОНЦЕ ТУННЕЛЯ

Аннотация

В статье рассмотрено решение задачи о гравитационном поезде, двигающемся в подземном прямолинейном туннеле с силами трения и без них. Показано, как легко и просто решить эту задачу с помощью математической программы Mathcad.

Ключевые слова: гравитационный поезд, Mathcad, численное решение обыкновенного дифференциального уравнения.

Контактная информация

Очков Валерий Федорович, доктор тех. наук, профессор, Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва; *адрес:* 111250, г. Москва, Красноказарменная ул., д. 14; *телефон:* (495) 362-71-71; *e-mail:* ochkov@twt.mpei.ac.ru

V. F. Ochkov,
National Research University MPEI, Moscow

K. Pisačić,
University North, Varazdin, Croatia

JOURNEY FROM ST. PETERSBURG TO MOSCOW, OR LIGHT AT THE END OF TUNNEL

Abstract

The article describes the solution of the problem of gravitational train moving in a straight underground tunnel with and without friction forces. It is shown how to easily solve this problem by using mathematical software Mathcad.

Keywords: gravity train, Mathcad, numerical solution of ordinary differential equations.

Рассказывают, что Николай I перед строительством железной дороги из Санкт-Петербурга в Москву положил на карту линейку и провел карандашом прямую линию между этими двумя столицами Российской империи. В районе Валдайской возвышенности карандаш наскочил на палец императора, и в этом месте дорога сделала небольшой крюк, о котором мы упомянем в конце статьи.

А вот еще один анекдот, но уже не исторический, а наших дней. Один человек сдавал в бухгалтерию отчет о командировке, в которой цена железнодорожного билета из Москвы в Петербург была несколько выше цены обратного билета. На вопрос бухгалтера, откуда взялась такая разница, подотчетное лицо посоветовало посмотреть на... глобус: из Москвы в Санкт-Петербург поезд поднимается вверх, а на обратном пути катится под горку...

Николай I для еще большего сокращения пути должен был не просто прочертить карандашом прямую линию на карте, а... просверлить в глобусе прямое отверстие, соединяющее Москву с Петербургом!

Шутки шутками, но уже давно обсуждается полуфантастический проект так называемого *гравитационного поезда*, катящегося без трения на магнитной подвеске в прямолинейном подземном туннеле, из которого выкачан воздух (рис. 1). Первую половину пути такой поезд будет катиться под горку без какой-либо тяги локомотива, а вторую половину пути будет по инерции подниматься вверх, замедляясь без тормозов до самого пункта назначения, где он и остановится.

Рис. 1

В Интернете (а рисунок 1 взят именно оттуда) есть множество готовых формул, по которым можно оценить, сколько времени такой поезд будет в пути и какой максимальной скорости он достигнет в середине туннеля. Но мы сейчас не будем считать по этим формулам, а проанализируем баланс сил, действующих на гравитационный поезд, и решим это уравнение — получим функцию положения поезда в туннеле в зависимости от времени. Отказ от готовых формул позволит нам в дальнейшем усложнить модель, приблизить ее к реальности, учтя силы трения.

На рисунке 2 изображена простейшая расчетная модель гравитационного поезда: на планете Земля (идеальный шар с радиусом R) сделан прямолинейный туннель длиной L, по которому идет поезд. Начало декартовых координат, от которого будет вестись отсчет, находится в центре Земли.

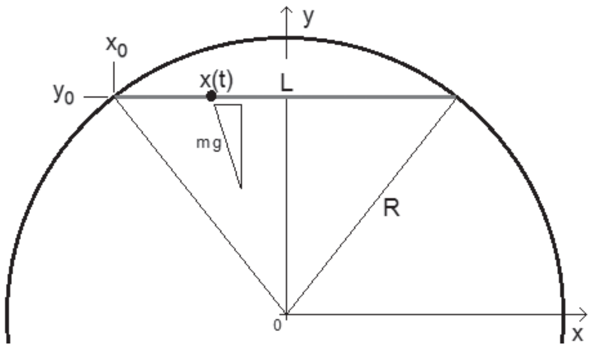

Рис. 2

Несложно показать, что на наш поезд (на физическую материальную точку) вдоль координаты x будет действовать ускоряющая сила (первая половина пути) или тормозящая сила (вторая половина пути), равная весу тела ($m \cdot g$), умноженному на отношение x/R значения координаты x к радиусу Земли R. Это положение точки будет зависеть от времени — будет функцией $x(t)$. Если от этой функции взять первую производную $x'(t)$, то мы получим скорость поезда, а если вторую производную $x''(t)$ — то его ускорение. Дифференциальное уравнение [2, 3] движения нашего гравитационного поезда будет иметь вид:

$$m \cdot x''(t) = -m \cdot g \cdot x(t) / R,$$

обусловленный вторым законом Ньютона: сумма сил, действующих на тело, равна произведению его массы на его ускорение.

На рисунке 3 показано решение этого дифференциального уравнения с помощью сайта Интернета. В диалоговое окно не только введено само уравнение — в нем также отмечены начальное положение поезда $x(0) = -L/2$ и его нулевая начальная скорость $x'(0) = 0$.

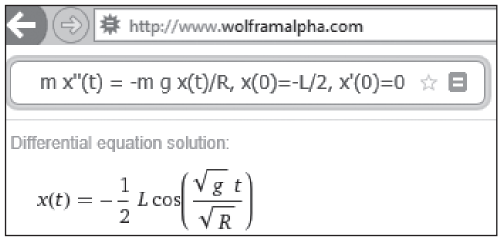

Рис. 3

Решение, показанное на рисунке 3, отображено графически в среде Mathcad на рисунке 4.

Наш фантастический поезд будет в пути чуть больше 42 минут и достигнет в середине туннеля скорости 1337 км/ч. Тут можно было бы сказать, что скорость поезда здесь превысила скорость звука, но в нашем туннеле воздуха нет и, значит, нет и звука.

Из рисунков 3 и 4 видно, что наш поезд будет подобно маятнику совершать в туннеле колебательные движения от одного города к другому (в нашем случае — от Петербурга к Москве и обратно) с периодом, не зависящим от расстояния между городами. Это расстояние будет влиять только на среднюю скорость и максимальную скорость поезда в середине пути. Эти расчеты в среде Mathcad показаны на рисунке 5.

На рисунке 5 после ввода исходных данных (R и L) рассчитываются начальные координаты поезда x_0 и y_0 и значение максимальной глубины туннеля h, которое для трассы Москва — Петербург составит чуть больше семи километров. Это очень важный параметр. Дело в том, что в нашей математической модели ускорение свободного падения g принимается за константу 9.807 м/с^2, встроенную в Mathcad. В более глубоких туннелях нужно будет учитывать изменение значения g в зависимости от глубины туннеля. А как меняется эта величина? Это отдельный вопрос. Если, например,

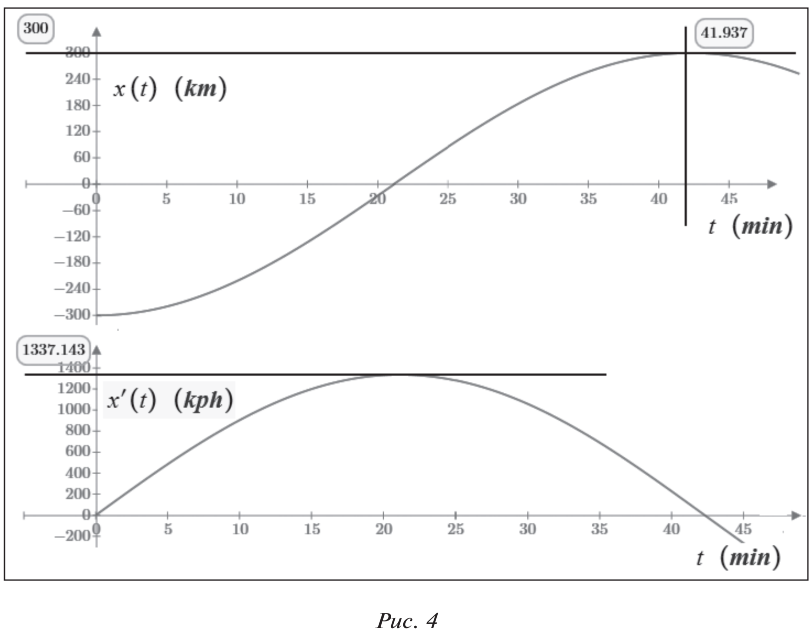

Рис. 4

$$R := 6400\ km \qquad L := 600\ km$$

$$x_0 := -\frac{L}{2} \qquad y_0 := \sqrt{R^2 - x_0^2} = 6392.965\ km \qquad h := R - y_0 = 7.035\ km$$

$$x(t) := -\frac{1}{2} L \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}} \cdot t\right) \qquad t := \frac{\pi}{\sqrt{\frac{g}{R}}} = 42.299\ min$$

$$v(t) := \frac{d}{dt} x(t) \rightarrow \frac{L \cdot \sin\left(t \cdot \sqrt{\frac{g}{R}}\right) \cdot \sqrt{\frac{g}{R}}}{2} \qquad v_{max} := \frac{L}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{R}} = 1336.9\ kph$$

Рис. 5

туннель прокопать через центр Земли (а такой фантастический проект тоже обсуждается), то в середине шахты такого *гравитационного лифта* значение ускорения свободного падения должно быть нулевым.

Уравнение, показанное на рисунке 3, можно дополнить силой сопротивления воздуха (если считать, что воздух в туннеле все же есть) и силой трения колес о рельсы, т. е. приблизить наш гравитационный поезд к реальным условиям. Силу сопротивления воздуха обычно принимают пропорциональной плотности воздуха ρ, перемноженной на площадь поперечного сечения поезда S и квадрат его скорости $x'(t)$. Сила трения колес о рельсы пропорциональна той составляющей веса поезда, которая параллельна оси y. Такое усложненное дифференциальное уравнение уже нельзя будет решить аналитически, т. е. нельзя будет получить формулу для функции $x(t)$. Это уравнение нужно будет решать численно, приближенно, т. е. получать таблицу значений функции $x(t)$ при разных значениях t. На рисунке 6 показано это решение в среде Mathcad.

Две силы трения нужно перемножить на встроенную в Mathcad функцию-ступеньку *sign*, которая возвращает нуль, если ее аргумент меньше или равен нулю, и единицу — в противном случае. Это сделано для того, чтобы сила трения поезда о воздух всегда действовала против движения поезда, а сила трения колес о рельсы равнялась нулю при нулевой скорости поезда. При высоких скоростях поезд будет тормозиться в основном за счет силы встречного ветра, а при низких скоростях — за счет силы трения качения колес. Такое можно наблюдать у приземляющегося самолета: сначала он тормозится за счет закрылков и тормозного парашюта, а затем за счет тормозов шасси. Из уравнения на рисунке 6 можно убрать квадратный корень, так как для туннеля Москва — Петербург отношение $x(t)/R$ очень мало. Но для других туннелей это отношение будет достаточно большим, и его нельзя будет игнорировать. В более глубоких туннелях нужно будет также учитывать изменение плотности воздуха.

При учете сил трения и правильно выбранной силе тяги локомотива F (у нас это 121.2 килограмм силы) поезд в туннеле благополучно доедет до конечной точки и покатится назад (если его не задержать, подложив, например, под его колеса тормозной башмак), повторяя движение затухающего маятника (рис. 7) [1], с окончательной остановкой не в середине туннеля, а где-то под Валдайской возвышенностью — там, где поезд под небольшим уклоном будет удерживаться силой тяги локомотива F.

На рисунке 6 показана встроенная функция Mathcad *Odesolve*, численно решающая (solve) наше обыкновенное (o) дифференциальное (d) уравнение (e — equation). До уравнения зафиксировано начальное положение поезда $x(0\ s) = x_0$ и его скорость $x'(0\ s) = 0$ км/ч (kph). От этой точки функция *Odesolve* будет поточечно рассчитывать значения создаваемой функции $x(t)$, отображенной на графике на рисунке 7.

Мы доказали и теоретически, и нашим численным экспериментом, что время движения гравитационного поезда не зависит от длины туннеля и равно этим самым 42 минутам, которые можно считать некоей константой, характеризующей нашу планету и связанной с гравитационной постоянной и плотностью Земли. При иных длинах туннеля будет меняться только скорость поезда — средняя и максимальная. В туннеле Москва — Петербург среднюю скорость легко рассчитать:

600 км / 42 мин = 857 км/ч.

И последнее.

Палец Николая I на линии «Москва — Петербург» — это не просто исторический анекдот. Это объезд реальным поездом реального большого и глубокого оврага, через который построили мост только в 2000 году при реконструкции дороги. Подробнее обо всех вымыслах и реалиях этой истории см.: http://af1461.livejournal.com/212024.html

Кстати о реальных, а не о фантастических туннелях. Знаете ли вы, по какой траектории они строятся, если

R (**km**)	L (**km**)	m (**tonne**)	F (**kgf**)	S (m^2)	ρ $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$	k	f	t_e (**hr**)
6400	600	15	121.2	3	1.25	0.02	0.00003	24

$$\alpha := 2 \cdot \operatorname{asin}\left(\frac{L}{2 \cdot R}\right) = 5.373\,^\circ \qquad x_0 := -R \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -300\ km$$

Решить

Решатель Ограничения

$$x(0\ s) = x_0 \qquad x'(0\ s) = 0\ kph$$

$$m \cdot x''(t) = F - m \cdot g \cdot \frac{x(t)}{R} - \left(k \cdot \rho \cdot S \cdot \frac{x'(t)^2}{2} + f \cdot m \cdot g \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x(t)}{R}\right)^2}\right) \cdot sign\left(x'(t)\right)$$

$$x := \mathbf{Odesolve}\left(x(t), t_e\right)$$

Рис. 6

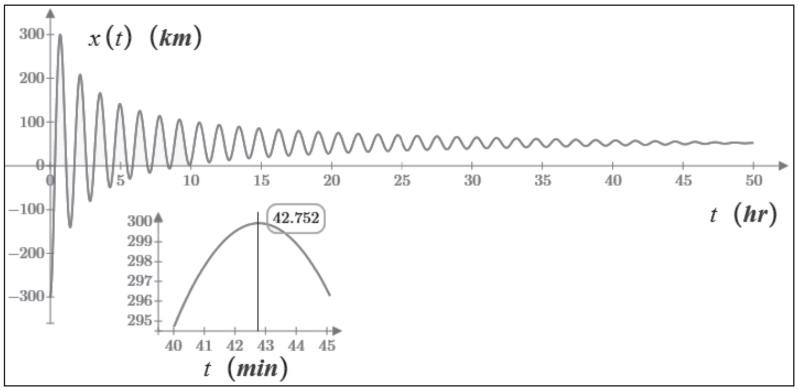

Рис. 7

нет каких-то особых ограничений?! Тут обычно отвечают: по прямой линии или по дуге окружности. Но это не так. В прямом туннеле будет скапливаться вода, и ее нужно будет непрерывно откачивать. Дугообразный же туннель копать довольно сложно. Туннели обычно строят так. Из двух точек, расположенных у противоположных склонов горы, два проходческих щита начинают прокладывать туннель строго по прямой линии, несколько поднимающейся над горизонтальной линией. Щиты должны встретиться в центре туннеля* несколько выше стартовых точек. В таком крышеобразном туннеле не только не будет скапливаться вода, но и при необходимости из него за счет своего веса сможет выкатиться заглохший транспорт.

* Еще один, последний анекдот. В комиссию по сооружению туннеля под Ла-Маншем пришли два брата-шотландца с лопатами и сказали, что они могут выкопать туннель так: один будет копать со стороны Англии, а другой — со стороны континентальной Европы. В комиссии усмехнулись и спросили: «А что будет, если вы промахнетесь?» «Ничего страшного, — ответили братья, — Вы получите два туннеля по цене одного!» Управление проходческими щитами — это высокая наука и искусство.

Свет в конце такого туннеля можно увидеть, только дойдя до его середины... Кстати говоря, несложно подсчитать, что если железную дорогу между Москвой и Петербургом проложить не на поверхности Земли (по дуге идеального шара с радиусом 6400 км), а в туннеле строго по прямой (см. рис. 1 и 2), то расстояние между этими двумя столицами России сократится всего лишь на 220 м.

На сайте: https://www.ptcusercommunity.com/videos/1982 можно увидеть анимацию движения гравитационного поезда.

Литературные и интернет-источники

1. *Очков В. Ф.* MCS на занятиях по математике, физике, информатике... // Компьютерные учебные программы и инновации. 2008. № 3. http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Pendulum/index.html

2. *Очков В. Ф., Богомолова Е. П.* Это страшное слово «диффуры»... // Информатика в школе. 2015. № 1.

3. *Ochkov V., Pisačić K.* Journey from St. Petersburg to Moscow or Model of Gravity Train in Mathcad // Technical Journal University North Croatia, Vol. 9, No. 1. http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/SPB-Moscow-Train.pdf

НОВОСТИ

Утвержден план мероприятий по Концепции развития дополнительного образования детей

Премьер-министр РФ Дмитрий Медведев подписал распоряжение об утверждении плана мероприятий на 2015–2020 годы по реализации Концепции развития дополнительного образования детей, сообщается на сайте российского кабмина.

Документ подготовлен Министерством образования и науки РФ совместно с Министерством культуры и Министерством спорта в целях реализации указа президента России «О мерах по реализации государственной политики в области образования и науки».

Концепция развития дополнительного образования детей утверждена распоряжением правительства РФ от 4 сентября 2014 года.

Данное распоряжение утверждает план реализации Концепции на 2015–2020 годы, направленный на достижение ее основных целей: обеспечение прав ребенка на развитие, личностное самоопределение и самореализацию, расширение возможностей для удовлетворения разнообразных интересов детей и их семей в сфере дополнительного образования, развитие инновационного потенциала государства.

В план включены 48 мероприятий по восьми направлениям, среди которых совершенствование нормативно-правового регулирования системы дополнительного образования детей, повышение доступности качественных услуг, развитие инфраструктуры и государственно-частного партнерства в системе дополнительного образования.

К 2020 году планируется достичь установленного указом президента охвата не менее 75 % детей в возрасте от пяти до 18 лет дополнительными общеобразовательными программами. На 1 декабря этот охват составляет 64 %.

«Принятые решения будут способствовать развитию системы дополнительного образования детей, расширению спектра соответствующих образовательных программ, развитию кадрового потенциала, расширению участия негосударственного сектора в оказании услуг дополнительного образования детей, внедрению механизмов государственно-частного партнерства», — говорится в сообщении кабмина.

(По материалам федерального портала «Российское образование»)