Новый способ решения симметричной и асимметричной задачи о провисающей цепи с грузом Или Лекция для великих математиков

В. Ф. Очков, А. Е. Тарасов, К. А. Орлов, Е. С. Науменко, Г. М. Липкин
НИУ «МЭИ», НИЯУ «МФТИ», школа 1205 при МЭИ

Аннотация. В статье описано новое решение хорошо известной задачи математической физики – определение параметров провисающей цепочки с бусинкой в двух вариантах: бусинка скользит по цепочке (симметрия), и бусинка закреплена на цепочке (асимметрия). Впервые применен метод минимизации потенциальной энергии для решения данной задачи и впервые для этого использованы единицы физических величин. Описан «цепной маятник». Предложен подход к решению задачи провисания конструкций из цепей в трехмерном пространстве.

Ключевые слова: Математическая физика, цепная линия, производная, интеграл, первообразная, длина кривой, центр тяжести кривой, потенциальная энергия механической системы, оптимизация с ограничениями, степень свободы, символьная и численная математика пакета Mathcad, цепное число π.

Ключевые математики: Ньютон, Лейбниц, Бернулли, Гюйгенс, Кронекер, Капелли, Роше, Фробениус, Гаусс, Эйлер, Пифагор, Лагранж, Дирихле, Джоуль, Чебышёв, Граблер и Кутцбах.

Сайт статьи: https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/Equations-parametrs-degree-freedom/td-p/606762

Считается, что «мечтать не вредно» и даже полезно. В мечтах человек ставит перед собой цель, к которой будет стремиться наяву. Но и бесплодные мечты-фантазии[1] тоже нельзя сбрасывать со счетов. Они развивают воображение, да и просто сами по себе занимательны и поучительны.

Давайте пофантазируем вот в каком плане! Представим себе современную лекционную аудиторию с компьютерами, интернетом, проектором и другими мультимедийным «прибамбасами»[2]. А «студентами» в этой аудитории будут такие великие математики: Исаак

[1] Вспомним гоголевского Манилова, который в мечтах представлял себя генералом или строил через пруд «каменный мост, на котором бы были по обеим сторонам лавки, и чтобы в них сидели купцы и продавали разные мелкие товары, нужные для крестьян».

[2] С компьютера преподавателя можно перехватить управление студенческими компьютерами и вывести их экран через проектор на большой экран. На всех компьютерах, естественно, установлены современные математические программы (Maple, Mathematica, Mathcad, SMath), электронные таблицы Excel и языки программирования, включая MATLAB.

Ньютон (1643—1727), Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716), Христиан Гюйгенс (1629—1695), Иоганн Бернулли (1667—1748) и Жозеф Луи Лагранж (1736—1813). По ходу лекции к ним будут присоединяться и другие математики. Преподаватель на их глазах будет решать на компьютере задачу о провисании цепочки с бусинкой – см. ниже ее описание, схему на рис. 1 и само решение. Очень интересно будет видеть лица этих математиков, и, а это главное, услышать их вопросы и комментарии[3]. Ведь эти люди имели прямое отношение к рассматриваемой задаче: Ньютон и Лейбниц разработали начала дифференциального исчисления, а тот же Лейбниц вместе с Гюйгенсом и Бернулли открыл формулу цепной линии. Считается, что они это сделали «одновременно и независимо друг от друга» [1]. Пятый же математик Лагранж связал свойства механической системы с ее потенциальной и кинетической энергией.

Итак, задача. Берется цепочка (абсолютна гибкая и нерастяжимая нить) длиной S и с удельной (линейной) массой m_c. Цепочка подвешивается на высоте h_1 слева и на высоте h_2 справа. Расстояние по горизонтали между точками подвеса равно L. На цепочку нанизана бусинка (материальная точка) массой M, которая без трения может скользить по цепочке. Или закреплена на цепочке (усложненный вариант задачи – см. ниже). Какие силы будут действовать на цепочку, как она будет провисать и чему будет равна абсцисса x бусинки?

[3] Уже есть подобные литературные опыты: «Прогулки с Пушкиным» (https://www.litmir.me/br/?b=42582&p=1), «Беседы с Сократом» (https://bookz.ru/authors/radzinskii-edvard/besedi-s_967.html) и др.

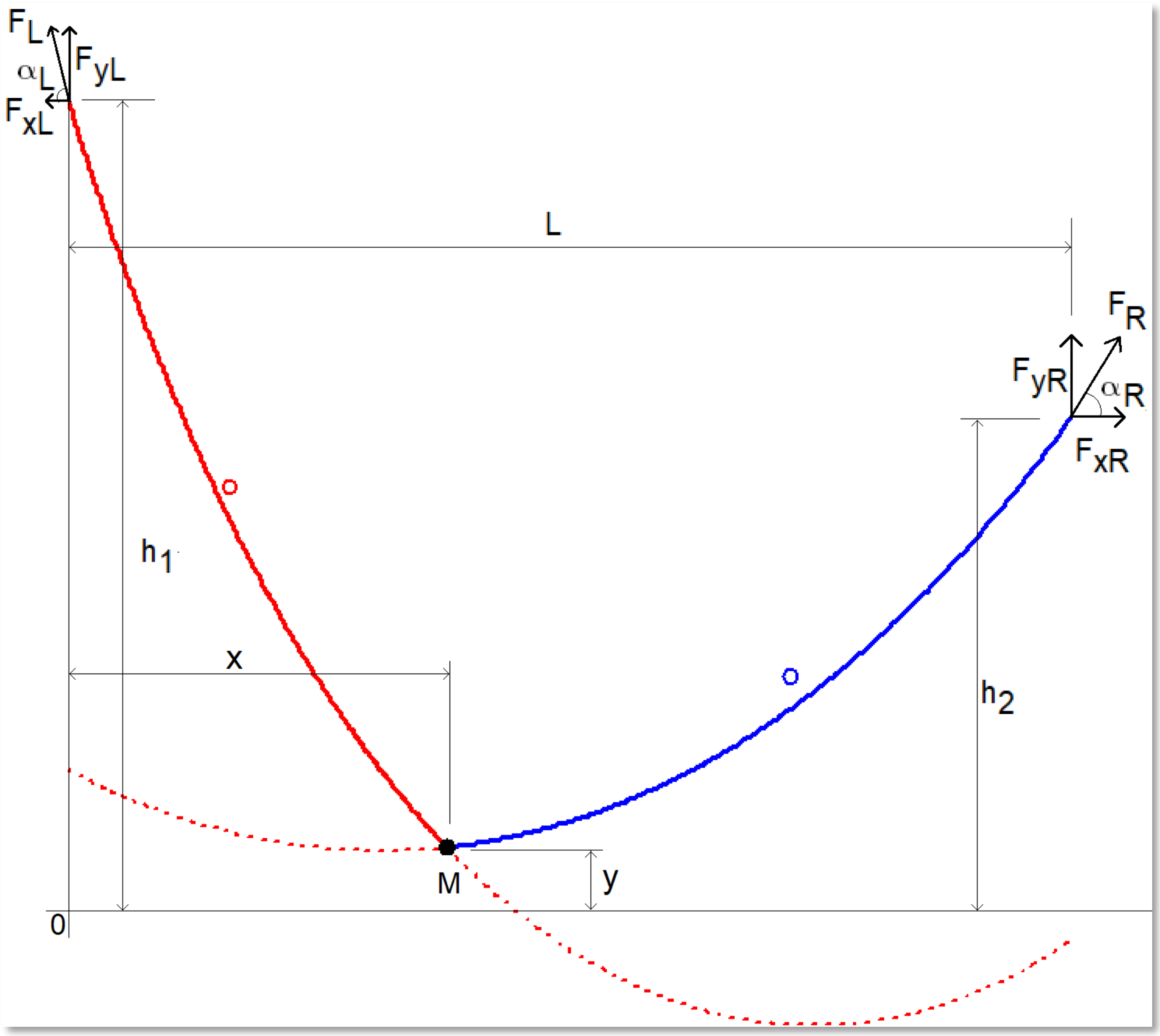

Рис. 1. Схема задачи о цепочке с бусинкой (здесь бусинка закреплена на цепочке на расстоянии x от левого края; бусинка скользит по цепочке – см. рис. 7)

В точках подвеса на цепочку действуют силы F_L (L – left, слева) и F_R (R – right, справа) в горизонтальных (F_{xL} и F_{xR}) и вертикальных (F_{yL} и F_{yR}) проекциях (см. рис. 1). Если известны значения углов между цепью и горизонтом в точках подвеса слева (α_L) и справа (α_R), то несложно рассчитать силы F_L и F_R, решив систему уравнений, отображающую равенства горизонтальных и вертикальных проекций сил – см. рис. 2 (решение в среде Mathcad).

Примечание. На рисунке 1 изображены в виде векторов только силы, действующие на цепочку в точках ее подвеса слева и справа: сами две силы и их вертикальные и горизонтальные проекции. Остальные три силы (вес груза, веса левой части цепочки и вес правой ее части) не показаны, но, естественно, учитываются в нижеприведенных расчетах. Эти три силы действуют вниз по вертикали.

$$\begin{bmatrix} F_{xL} = F_{xR} \\ F_{yL} + F_{yR} = G \end{bmatrix} \qquad G = g \cdot m_c \cdot S + g \cdot M$$

$$\begin{bmatrix} F_L \cdot \cos(\alpha_L) = F_R \cdot \cos(\alpha_R) \\ F_L \cdot \sin(\alpha_L) + F_R \cdot \sin(\alpha_R) = G \end{bmatrix} \xrightarrow{solve\,,F_L\,,F_R}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{G \cdot \cos(\alpha_R)}{\cos(\alpha_R) \cdot \sin(\alpha_L) + \cos(\alpha_L) \cdot \sin(\alpha_R)} & \dfrac{G \cdot \cos(\alpha_L)}{\cos(\alpha_R) \cdot \sin(\alpha_L) + \cos(\alpha_L) \cdot \sin(\alpha_R)} \end{bmatrix}$$

Рис. 2. Решение системы уравнений баланса сил в точках

Оператор `solve` предназначен для аналитического (символьного) решения алгебраических уравнений любого вида (линейных и нелинейных [2]). Но система двух уравнений, показанная и решенная на рис. 2, линейная вида `M x = v`, где `M` – это квадратная матрица коэффициентов при неизвестных, `x` – вектор неизвестных, а `v` – вектор свободных членов. А для анализа и решения таких систем уравнений (СЛАУ) в среде Mathcad есть специализированные средства, показанные на рис. 3. Во-первых, с помощью встроенной в Mathcad функции `rank` определяются *ранги* основной и расширенной матриц (две двойки). И неизвестных у нас две. Поэтому наша система имеет единственное решение[4]. Оно находится через векторное умножение инвертированной матрицы `M` на вектор `v`.

[4] Высшая математика в технических вузах на первом курсе обычно преподается в рамках двух дисциплин: *линейная алгебра* и *математический анализ*. Основной теоремы матанализа мы коснемся ниже. А сейчас мы затронем основную теорему линейной алгебры о единственности решения СЛАУ. У нас в России ее называют теоремой Кронекера — Капелли, а в других странах теоремой Роше — Капелли, и теоремой Роше — Фробениуса и др. Так что мы можем спокойно пригласить в нашу компанию (аудиторию) еще и Леопольда Кронекера (1823-1891), Альфредо Капелли (1855-1910), Эжена Роше (1832-1910) и Фердинанда Георга Фробениуса (1849-1917). Кстати, если при подсчете значений сил по формулам, показанным на рис. 2 и 3, задать значения углов α_L и α_R, но не задать значение переменной `G` (вес цепочки с бусинкой), то формально ошибки не будет: пакет Mathcad подсчитает по формулам, решив, что `G` – это встроенная единица магнитного потока гаусс. Об ошибке будет говорить неправильная единица измерения в ответе. Так что великий немецкий математик («король математиков») Иоганн Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) тоже может быть приглашен в нашу математическую компанию. На звание «короля математики» также вполне обосновано претендует и Леонард Эйлер (1707—1783). Этот швейцарско-немецко-русский математик [1] фактически написал все учебники по высшей математике, по которым и сейчас учатся студенты технических вузов – см. начало сноски. Правда, на обложках этих книг стоят другие имена, но это не меняет сути дела.

$$M \cdot x = v \qquad M = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_L) & -\cos(\alpha_R) \\ \sin(\alpha_L) & \sin(\alpha_R) \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} \cos(\alpha_L) & -\cos(\alpha_R) \\ \sin(\alpha_L) & \sin(\alpha_R) \end{bmatrix}\right) \to 2 \qquad \mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} \cos(\alpha_L) & -\cos(\alpha_R) & 0 \\ \sin(\alpha_L) & \sin(\alpha_R) & G \end{bmatrix}\right) \to 2$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha_L) & -\cos(\alpha_R) \\ \sin(\alpha_L) & \sin(\alpha_R) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \dfrac{G \cdot \cos(\alpha_R)}{\cos(\alpha_R) \cdot \sin(\alpha_L) + \cos(\alpha_L) \cdot \sin(\alpha_R)} \\ \dfrac{G \cdot \cos(\alpha_L)}{\cos(\alpha_R) \cdot \sin(\alpha_L) + \cos(\alpha_L) \cdot \sin(\alpha_R)} \end{bmatrix}$$

Рис. 3. Анализ и решение системы линейных алгебраических уравнений в среде Mathcad

Система двух линейных алгебраических уравнений, показанная и аналитически (символьно) решенная[5] на рис. 2 и 3, отображает тот факт, что нашу конструкцию тянет вниз только вес цепочки плюс вес бусинки, а горизонтальные внешние силы отсутствуют[6]. Остается «самая малость» – найти значения углов α_L и α_R, под которыми цепочка крепится к краям слева и справа. А это можно сделать, имея под рукой формулу производной выражения для цепной линии.

Если концы цепочки подвешены на одной высоте, а бусинка скользит по цепочке, то силы F_L и F_R будут равны и примут значение `G / (2 sin α)`, где `G` – это, повторяем, вес цепочки с бусинкой.

Задача имеет сугубо практическое приложение. Достаточно вспомнить подвесную канатную дорогу [3, 4] или шары, нанизанные на воздушные линии электропередачи (ЛЭП) для того, чтобы провода были хорошо видны летчикам пролетающих самолетов[7] [5].

В бумажных и электронных источниках можно найти множество примеров решения этой задачи [6-9]. В них приводится большое количество формул разной степени сложности, которые понятны только избранным. В некоторых исследованиях цепную функцию заменяют на параболу[8].

---

[5] Эту систему, конечно, можно решить и без компьютера. Но в настоящее время мы пишем не на бумаге, а набираем текст на компьютере (планшете, смартфоне) и решаем даже простые математические задачи с помощью компьютера. Спроси человека, сколько будут 7 умножить на 8, и он… полезет в карман за смартфоном!

[6] Но их можно добавить. На висящую цепочку с кулоном сбоку, например, дует ветер… См. следующую сноску.

[7] Идея решения задачи о цепочке с кулоном возникла у первого автора этой статьи во время его «прогулок с математиками» по дачному участку, где висели электрические провода, натянутые между столбами. Так вот, на одном проводе был подвешен... кирпич для того, чтобы ветер сильно не раскачивал оголенный электрический провод, а он не задевал соседний.

[8] В нашу аудиторию с пятью математиками можно пригласить и Галилео Галилея (1564-1642). Он одно время считал, что цепь провисает по параболе. Но потом, правда, осознал свою ошибку. Цепную линию заменяют параболой при малом провесе цепи. Аналогия – синус угла часто заменяют самим углом при

Но здесь, в этой статье мы предложим новый, предельно простой подход к решению, доступный многим.

Ремарка. Полтора-два века назад путешествие по Свету могли позволить себе только очень богатые и физически здоровые люди. Но с появлением современных транспортных средств такое удовольствие стало доступно «широким массам трудящихся», а не только избранным. Сел в самолет, автомобиль или на поезд – и за короткое время с комфортом добрался практически до любого уголка Земли.

Что-то подобное можно сказать и о математике. Раньше в ее «дебри» с огромным количеством лемм, теорем, сложных формул и алгоритмов могли «забираться» только избранные люди – люди с особыми математическими способностями и с соответствующим математическим образованим. Но в настоящее время круг таких избранных существенно расширился за счет появления компьютерных математических программ, которые очень облегчают путешествие в мир математики. К таким «широким массам трудящихся» относят себя и авторы данной статьи[9]. Конечно, далеко не во все «закоулки» математики можно попасть с помощью компьютера. Но математический анализ и линейная алгебра вполне доступны для простого человека, вооруженного компьютером. Заканчивая данную ремарку, нельзя не сказать, что путешественники часто пишут путевые заметки. Эта статья и является некими заметками о путешествии в один из многочисленных уголков мира математики.

Итак, чтобы решить задачу о цепочке с бусинкой нужно вспомнить или найти в интернете формулу цепной линии («детище» Лейбница, Гюйгенса и Бернулли) и освежить в памяти азы математического анализа: что такое производная, интеграл (вспомним Ньютона с Лейбницем!), длина кривой[10] и координаты ее центра масс (центра тяжести[11]) – см. рис. 4.

малых значениях угла (до 7 угловых градусов). Семь, кстати, «красивое и умное» число. Вспомним семь чудес света, семь мудрецов, семь нот звукоряда, семь цветов радуги, семь дней недели, семь чудес света, семь холмов Рима и т. д. В нашей «аудитории» как раз семь «основных» математиков. Перечислим их по алфавиту: Бернулли, Галилей (староста), Гюйгенс, Дирихле (см. ниже), Лагранж, Лейбниц и Ньютон!

[9] Эту статью первый автор редактировал в промежутках между посещениями музеев и других примечательных мест одной европейской столицы – во время его очередного «путешествия по Свету». Благо под рукой был планшет с Word'м, математическими программами и выходом в Интернет. Можно сказать, что это было одновременное путешествие и по Свету, и по математике…

[10] Гюйгенс, кстати, впервые нашел длину циклоиды. И еще одно «кстати»: на рисунке 4 определенный интеграл при расчете длины отрезка цепной линии дополнен формулой с первообразной. До этого (основная теорема математического анализа) «одновременно и независимо друг от друга» додумались Ньютон с Лейбницем. Можно найти соответствующие первообразные и для расчета координат центра тяжести отрезков цепной линии. Но лучше оставить здесь интеграл. Это более целесообразно в образовательном плане, так как интеграл тут будет более понятен в интуитивном плане. В формуле длины кривой просматривается теорема Пифагора о катетах и гипотенузе. Так что этого древнегреческого математика тоже можно пригласить в нашу компанию. И еще одно «кстати». Пакет Mathcad при включенном режиме SmartMath может самостоятельно заменять численное интегрирование на работу с первообразной и делать другие умные ходы, упрощающие и ускоряющие расчеты, делающие их более точными.

[11] У нас гравитационное поле однородное. Поэтому центр тяжести и центр масс – это одна и та же точка. Но нам ничто не мешает рассмотреть нашу задачу и в неоднородном поле тяготения: подвесить, например, нашу цепь на двух огромных мачтах далеко от Земли, где уже будет сказываться эта самая неоднородность поля тяготения.

$$F(x,a,h,x0) := h + a\cdot\left(\cosh\left(\frac{x-x0}{a}\right)-1\right)$$ Цепная линия

$$F'(x,a,x0) := \sinh\left(\frac{x-x0}{a}\right)$$ Производная цепной линии

$$s(x_1,x_2,a,x0) := \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+F'(x,a,x0)^2}\,dx$$ Длина цепной линии

или по теореме Ньютона-Лейбница
$$s(x_1,x_2,a,x0) := a\cdot\left(\sinh\left(\frac{x_2-x0}{a}\right)-\sinh\left(\frac{x_1-x0}{a}\right)\right)$$

$$x_{cg}(x_1,x_2,a,x0) := \frac{\int_{x_1}^{x_2} x\cdot\sqrt{1+F'(x,a,x0)^2}\,dx}{s(x_1,x_2,a,x0)}$$ Абсцисса центра тяжести цепочки

$$y_{cg}(x_1,x_2,a,h,x0) := \frac{\int_{x_1}^{x_2} F(x,a,h,x0)\cdot\sqrt{1+F'(x,a,x0)^2}\,dx}{s(x_1,x_2,a,x0)}$$ Ордината центра тяжести цепочки

Рис. 4. Вспомогательные функции пользователя для решения задачи о цепочке с бусинкой

Формула цепной линии на рис. 4 дана не в привычном каноническом виде `a·cosh(x/a)`. Этот вид с одним параметром `a` приводится во всех справочниках и учебниках, но он не годится для нашей задачи[12]. Мы будем использовать другую, не каноническую формулу цепной линии – формулу с тремя параметрами `a`, `h` и `x0` [3, 10-14]. Дополнительные два параметра `h` (ордината) и `x0` (абсцисса) будут фиксировать минимум (`a>0` – провисающая цепь) или максимум (`a<0` – арка[13]) цепной линии. Параметр `a` определяет «крутизну» цепной линии. Если цепочку натягивать, то значение параметра `a` будет стремиться к нулю. Если же наоборот – приближать точки подвеса цепочки друг к другу, то значение параметра `a` будет стремиться к бесконечности. И еще одно замечание. У нас буквой F обозначается и функция (F – function) цепной линии и силы (F – force). Это не очень хорошо, но функция у нас без индексов, а силы везде прописаны с индексами.

---

[12] Математики часто дают абсолютно точные и абсолютно бесполезные ответы. Каноническая формула параболы как и цепной линии тоже имеет один параметр, но на практике опять же работают с тремя параметрами. Примеры здесь [10-13].

[13] Формулу цепной линии можно найти не только в книгах или в Интернете, но и на... архитектурных объектах, эксплуатирующих красоту и уникальное прочностное свойство перевернутой цепи. Так, например, в американском городе Сент-Луисе установлена знаменитая арка Gateway Arch в виде перевернутой цепи. У ее основания прописана ее формула с одним аргументом и двумя параметрами y = 757.7 — 127.7 · cosh(x / 127.7). В эту формулу заложены футы, но мы будем работать, естественно, с метрами.

Несложно сообразить[14], что цепочка со скользящей бусинкой сформирует два отрезка цепной линии, *симметричные* относительно вертикали, проходящей через бусинку. У этих отрезков в формуле цепной линии будут одинаковыми параметры a и h, но разными параметр $x0$. Введем в расчет переменную Δ (см. рис. 7 – верх и центр), и будем считать, что в уравнении левого отрезка цепи $x0 = x + \Delta$, а в уравнении правого отрезка $x0 = x - \Delta$ (симметрия – см. заголовок статьи!).

Нам нужно будет вспомнить не только азы математического анализа и формулу цепной линии (Ньютон, Лейбниц, Гюйгенс и Бернулли), но и начала теоретической механики[15], в частности, следующий ее закон (Лагранж[16]): механическая система в покое принимает такое положение, при котором ее потенциальная энергия будет минимальной[17]. На рисунке 5 зафиксировано, как после ввода исходных данных[18] (значений переменных h_1, L, S, m_c, M и h_2), расчета значения переменной G (вес цепочки с бусинкой) и определения минимальной длины цепочки S_{min} создается функция пользователя с именем PE (потенциальная энергия [12-14]) с четырьмя аргументами – с искомой абсциссой бусинки x и искомыми параметрами двух симметричных отрезков нашей цепочки с бусинкой a, h и Δ. У функции PE есть и параметры. Это величины g (ускорение свободного падения), m_c (линейная масса цепочки) и M (масса бусинки). Их тоже следовало бы указать в списке аргументов функции PE. Но мы это не делаем из-за особенностей оптимизации в среде Mathcad (см. рис. 6).

h_1 (m)	L (m)	S (m)	m_c $\left(\frac{gm}{m}\right)$	M (kg)	h_2 (m)
15	15	25	100	1	10

$$G := g \cdot (M + S \cdot m_c) = 3.5\ kgf \qquad s_{min} := \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + L^2} = 15.811\ m$$

$$PE(x, a, h, \Delta) := g \cdot \begin{pmatrix} s(0, x, a, x+\Delta) \cdot m_c \cdot y_{cg}(0, x, a, h, x+\Delta) \\ + M \cdot F(x, a, h, x+\Delta) \\ + s(x, L, a, x-\Delta) \cdot m_c \cdot y_{cg}(x, L, a, h, x-\Delta) \end{pmatrix}$$

---

[14] Сообразить тут недостаточно – нужно еще и доказать! Пусть читатель сделает это сам!

[15] Неслучайно МГУ (главный вуз России) имеет не два самостоятельных факультета математики и механики, а один механико-математический факультет – знаменитый МехМат. Первый автор этой статьи после школы мечтал в него поступить! Но побоялся – посчитал себя «путешественником-любителем», а не будущим профессионалом (см. ремарку выше в основном тексте).

[16] Этот принцип носит имя «Лагранжа-Дирихле». Тут опять же имело место быть «одновременность и независимость». Так что Иоганн Петер Густав Лежён Дирихле (1805-1859) тоже просится в нашу аудиторию.

[17] Если мы у нашей цепочки просуммируем потенциальную энергию каждого звена, то эта сумма окажется минимальной по сравнению с другими «способами провисания»: парабола, гипербола, синусоида и др.

[18] Они вводятся с единицами измерений (еще одна новинка при нашем решении задачи о провисании цепи), что упрощает расчеты и позволяет вести контроль за правильностью ввода формул. Кстати, в нашей аудитории есть человек, в честь которого названа единица силы. Это Ньютон. Но нам в данных расчетах удобнее и привычнее измерять силы не в ньютонах, а в килограммах-силы. Кроме того, использование единицы ньютон может обидеть других математиков, сидящих в нашей аудитории.

Рис. 5. Ввод исходных данных и функции потенциальной энергии цепочки с бусинкой

Потенциальная энергия цепочки с бусинкой – это сумма трех величин: потенциальной энергии левого отрезка цепочки, потенциальной энергии подвешенной бусинки и потенциальной энергии правого (короткого в условиях нашей задачи) отрезка цепочки. Кстати, на рисунках 1 и 7 можно видеть над отрезками цепочки у их середины кружочки, отмечающие центры тяжести этих двух отрезков кривой. Координаты этих точек вычислить несложно по функциям с именами x_{cg} (абсцисса) и y_{cg} (ордината), показанным на рис. 4. Функция с именем s возвращает длину отрезка цепной линии на интервале от x_1 до x_2. Этот же интервал используется и для вычисления координат центра тяжести. В нашей задаче эти интервалы будут такими: 0-x и x-L.

Решение задачи о форме провисания цепочки с бусинкой сводится к решению задачи оптимизации (поиск минимума) с ограничениями: нужно найти значения абсциссы бусинки x и параметров цепной линии для ее левого (α, h и $x + \Delta$) и правого (α, h и $x - \Delta$) отрезков, при которых целевая функция PE примет минимальное значение, а ограничения выполнялись бы. Ограничений четыре. Они (равенства) показаны на рис. 6.

Решить

Начальные приближения

$$\begin{bmatrix} x \\ a \\ h \\ \Delta \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{m}$$

Ограничения

$$F(0, a, h, x+\Delta) = h_1 \qquad F(L, a, h, x-\Delta) = h_2$$

$$F(x, a, h, x+\Delta) = F(x, a, h, x-\Delta)$$

$$s(0, x, a, x+\Delta) + s(x, L, a, x-\Delta) = S$$

Решатель

$$\begin{bmatrix} x \\ a \\ h \\ \Delta \end{bmatrix} := \mathbf{Minimize}(PE, x, a, h, \Delta) = \begin{bmatrix} 8.67743 \\ 8.18564 \\ 1.32975 \\ 4.732 \end{bmatrix} \mathbf{m}$$

Рис. 6. Решение задачи оптимизации с ограничениями

Ограничения описывают геометрию провисания цепочки с бусинкой:

1. Левый конец цепочки находится на высоте h_1
2. Правый конец цепочки находится на высоте h_2
3. Два отрезка цепочки держат бусинку в точке x-y
4. Сумма длин двух отрезков цепочки остается постоянной и равной величине S.

Вызов функции `Minimize` требует начального приближения. На рисунке 6 показано, что были выбраны значения в метрах 5, 2, 2 и 1 в качестве первого приближения для переменных `x`, `a`, `h` и `Δ`. Хорошее правило предписывает, чтобы ответ, полученный при численном решении задачи (при вызове функции `Minimize`), был скопирован и подставлен в качестве первого приближения. И это иногда приходится делать несколько раз, пока ответ не перестанет изменяться. Это является необходимым, но не достаточным условием правильного численного решения. Но в нашем решении на рис. 6 была сделана только одна подстановка, что говорит о стабильности решения.

Решение задачи о цепочке с бусинкой графически отображено на рис. 7.

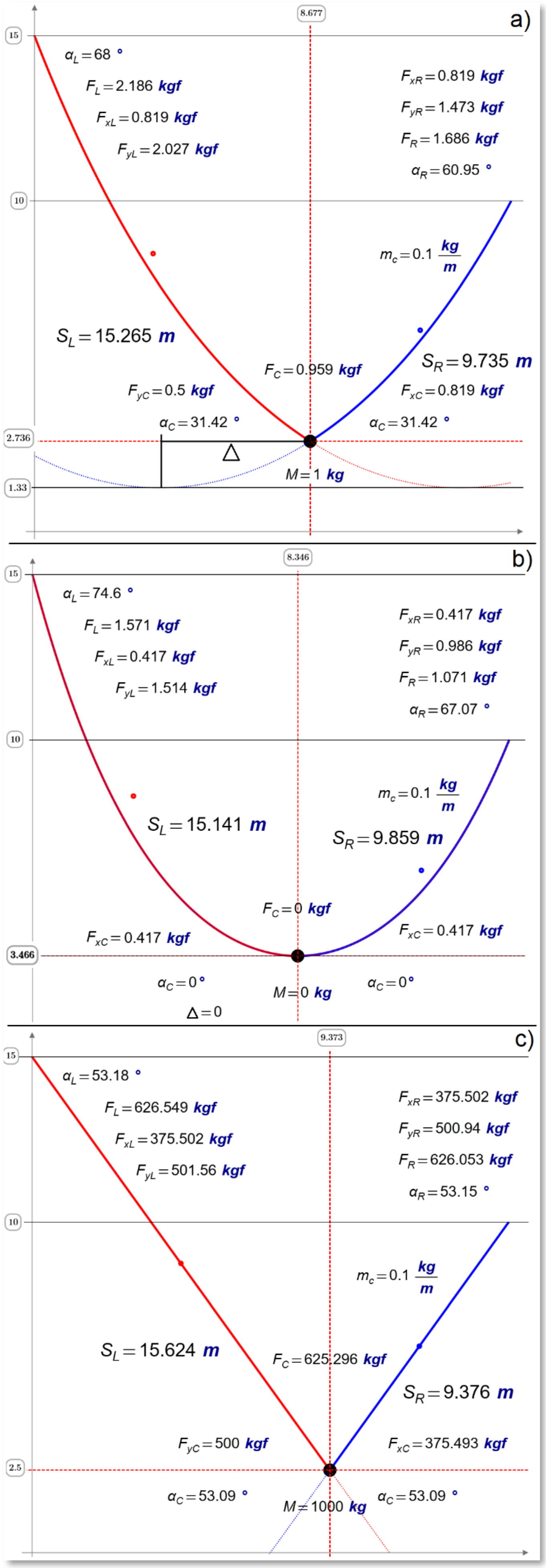
a)
$\alpha_L = 68°$
$F_L = 2.186$ kgf
$F_{xL} = 0.819$ kgf
$F_{yL} = 2.027$ kgf
$F_{xR} = 0.819$ kgf
$F_{yR} = 1.473$ kgf
$F_R = 1.686$ kgf
$\alpha_R = 60.95°$
$m_c = 0.1$ kg/m
$S_L = 15.265$ m
$S_R = 9.735$ m
$F_C = 0.959$ kgf
$F_{yC} = 0.5$ kgf
$F_{xC} = 0.819$ kgf
$\alpha_C = 31.42°$
$\alpha_C = 31.42°$
Δ
$M = 1$ kg
8.677
15
10
2.736
1.33
b)
$\alpha_L = 74.6°$
$F_L = 1.571$ kgf
$F_{xL} = 0.417$ kgf
$F_{yL} = 1.514$ kgf
$F_{xR} = 0.417$ kgf
$F_{yR} = 0.986$ kgf
$F_R = 1.071$ kgf
$\alpha_R = 67.07°$
$m_c = 0.1$ kg/m
$S_L = 15.141$ m
$S_R = 9.859$ m
$F_C = 0$ kgf
$F_{xC} = 0.417$ kgf
$F_{xC} = 0.417$ kgf
$\alpha_C = 0°$
$\alpha_C = 0°$
$M = 0$ kg
$\Delta = 0$
8.346
15
10
3.466
c)
$\alpha_L = 53.18°$
$F_L = 626.549$ kgf
$F_{xL} = 375.502$ kgf
$F_{yL} = 501.56$ kgf
$F_{xR} = 375.502$ kgf
$F_{yR} = 500.94$ kgf
$F_R = 626.053$ kgf
$\alpha_R = 53.15°$
$m_c = 0.1$ kg/m
$S_L = 15.624$ m
$F_C = 625.296$ kgf
$S_R = 9.376$ m
$F_{yC} = 500$ kgf
$F_{xC} = 375.493$ kgf
$\alpha_C = 53.09°$
$\alpha_C = 53.09°$
$M = 1000$ kg
9.373
15
10
2.5

Рис. 7. Графическое отображение задачи о цепочке со скользящей по ней бусинкой

На рисунке 7 видно, как меняется сила растяжения цепочки в трех местах: в месте нахождения бусинки (минимум), в точке правого крепления (среднее значение) и в точке левого крепления (максимум). При желании несложно построить соответствующую *эпюру* – график изменения силы растяжения цепочки по ее длине (см. также пункт 3 олимпиадного задания в конце статьи). Такие эпюры часто рассматриваются в курсах теоретической механики и сопротивления материалов.

С решением, показанным на рис. 7, можно «поиграть», протестировав их. Если бусинку убрать (`M = 0`), то две цепные линии сольются в одну (b), а форма этой кривой не будет зависеть от значения удельной массы цепочки. Если же вес бусинки увеличивать (и/или уменьшать вес цепочки), то две цепные линии превратятся в почти прямые линии (натянутые струны[19]), в точке пересечения которых будет висеть бусинка (см. рис. 7 c). Центры тяжести в этом случае будут находиться в центре «почти прямых» отрезков. При значительном весе бусинки по сравнению с весом цепочки (это уже не бусинка, а некий груз) решение задачи существенно упрощается и сводится к решению несложной системы уравнений – это уже будет не цепочка с бусинкой, а так называемый веревочный многоугольник [14].

На рисунке 8 показана проверка решения задачи о цепочки с плавающей бусинкой посредством расчета моментов сил относительно бусинки и крайних точек подвеса: они равны для обоих направлениях, что свидетельствует о правильности нашего решения. Равенства проекций сил по горизонтали и вертикали проверять не нужно, т. к. они были заложены в математическую модель цепочки с бусинкой – см. рис. 2 и 3.

Сумма моментов сил по часовой стрелке относительно бусинки

$$F_{yL}\cdot x+\mathbf{g}\cdot m_c\cdot s(x,L,a,x-\Delta)\cdot(x_R-x)+F_{xR}\cdot(h_2-y)=26.901\ \mathbf{kgf\cdot m}$$

Сумма моментов сил против часовой стрелки относительно бусинки

$$F_{xL}\cdot(h_1-y)+\mathbf{g}\cdot m_c\cdot s(0,x,a,x+\Delta)\cdot(x-x_L)+F_{yR}\cdot(L-x)=26.901\ \mathbf{kgf\cdot m}$$

Сумма моментов сил по часовой стрелке относительно h_1

$$\mathbf{g}\cdot m_c\cdot s(0,x,a,x+\Delta)\cdot x_L+\mathbf{g}\cdot M\cdot x+\mathbf{g}\cdot m_c\cdot s(x,L,a,x-\Delta)\cdot x_R=26.195\ \mathbf{kgf\cdot m}$$

Сумма моментов сил против часовой стрелки относительно h_1

$$F_{yR}\cdot L+F_{xR}\cdot(h_1-h_2)=26.195\ \mathbf{kgf\cdot m}$$

Сумма моментов сил относительно h_2 по часовой стрелке

$$F_{yL}\cdot L=30.398\ \mathbf{kgf\cdot m}$$

Сумма моментов сил против часовой стрелки относительно h_2

$$F_{xL}\cdot(h_1-h_2)+\mathbf{g}\cdot m_c\cdot s(0,x,a,x+\Delta)\cdot(L-x_L)+\mathbf{g}\cdot M\cdot(L-x)+\mathbf{g}\cdot m_c\cdot s(x,L,a,x-\Delta)\cdot(L-x_R)=30.398\ \mathbf{kgf\cdot m}$$

[19] Тут можно отвлечься от основной темы статьи и показать нашим математикам, как можно смоделировать колебание струны через аналитическое или численное решение соответствующего дифференциального уравнения.

Рис. 8. Проверка правильности решения задачи о цепочке со скользящим кулоном

С цепочкой можно «поиграть» и в таком «направлении» – оттянуть бусинку вниз или/и вбок и отпустить ее в свободный полет. Получится интересный маятник [10], где потенциальная энергия будет переходить в кинетическую и наоборот. Сумма же этих энергий будет оставаться постоянной, если не учитывать диссипацию энергии (трение о воздух и проч.).

А сейчас мы усложним задачу – закрепим бусинку на цепочке так, чтобы она по горизонтали отстояла от левого края на расстоянии x. Такая постановка задачи более близка к реальности, если вспомнить канатную дорогу. Скользящая по цепочке бусинка, которую мы рассмотрели ранее, – это некая аварийная ситуация, когда кабина подвесной канатной дороги отрывается от тянущего ее троса и повисает на середине поддерживающего троса. Если бусинку закрепить на цепочке, то симметрия пропадет, и мы будем иметь уже две независимые цепные линии со своими тройками параметров, а задача будет иметь не четыре, а шесть (a_L, h_L, $x0_L$, a_R, h_R и $x0_R$) параметров оптимизации – см. рис. 9. А ограничений будет уже на четыре, а пять – к четырем геометрическим, задействованным в задаче со скользящей бусинкой, нужно будет добавить еще одно – уравнение баланса моментов сил относительно какой-либо выбранной точки. Дело было так. Сначала в задаче с шестью параметрами оставили только четыре геометрических ограничения. Но проверка полученного решения показала, что нет баланса моментов сил – см. рис. 8. Тогда и было добавлено еще одно уже «силовое» ограничение-равенство – баланс момента сил относительно точки подвеса бусинки. После этого проверка двух других балансов моментов дала положительный результат.

Решить

Начальные приближения

$$\begin{bmatrix} a_L \\ h_L \\ x0_L \\ a_R \\ h_R \\ x0_R \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 12 \\ 10 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \mathbf{m} \qquad PE\left(a_L, h_L, x0_L, a_R, h_R, x0_R\right) = 25.822\ \mathbf{kgf \cdot m}$$

Ограничения

$$F\left(0, a_L, h_L, x0_L\right) = h_1 \quad F\left(L, a_R, h_R, x0_R\right) = h_2 \quad F\left(x, a_L, h_L, x0_L\right) = F\left(x, a_R, h_R, x0_R\right) \quad s\left(0, x, a_L, x0_L\right) + s\left(x, L, a_R, x0_R\right) = S$$

$$\left\| \begin{array}{l} \alpha_L \leftarrow -atan\left(F'\left(0, a_L, x0_L\right)\right) \\ \alpha_R \leftarrow atan\left(F'\left(L, a_R, x0_R\right)\right) \\ F_{yL} \leftarrow \dfrac{G \cdot \cos\left(\alpha_R\right) \cdot \sin\left(\alpha_L\right)}{\cos\left(\alpha_R\right) \cdot \sin\left(\alpha_L\right) + \cos\left(\alpha_L\right) \cdot \sin\left(\alpha_R\right)} \\ x_R \leftarrow x_{cg}\left(x, L, a_R, x0_R\right) \\ F_{xR} \leftarrow \dfrac{G \cdot \cos\left(\alpha_L\right) \cdot \cos\left(\alpha_R\right)}{\cos\left(\alpha_R\right) \cdot \sin\left(\alpha_L\right) + \cos\left(\alpha_L\right) \cdot \sin\left(\alpha_R\right)} \\ y \leftarrow F\left(x, a_L, h_L, x0_L\right) \\ F_{yL} \cdot x + g \cdot m_c \cdot s\left(x, L, a_R, x0_R\right) \cdot \left(x_R - x\right) + F_{xR} \cdot \left(h_2 - y\right) \end{array} \right. = \left\| \begin{array}{l} \alpha_L \leftarrow -atan\left(F'\left(0, a_L, x0_L\right)\right) \\ \alpha_R \leftarrow atan\left(F'\left(L, a_R, x0_R\right)\right) \\ F_{xL} \leftarrow \dfrac{G \cdot \cos\left(\alpha_R\right) \cdot \cos\left(\alpha_L\right)}{\cos\left(\alpha_R\right) \cdot \sin\left(\alpha_L\right) + \cos\left(\alpha_L\right) \cdot \sin\left(\alpha_R\right)} \\ y \leftarrow F\left(x, a_L, h_L, x0_L\right) \\ x_L \leftarrow x_{cg}\left(0, x, a_L, x0_L\right) \\ F_{yR} \leftarrow \dfrac{G \cdot \cos\left(\alpha_L\right) \cdot \sin\left(\alpha_R\right)}{\cos\left(\alpha_R\right) \cdot \sin\left(\alpha_L\right) + \cos\left(\alpha_L\right) \cdot \sin\left(\alpha_R\right)} \\ F_{xL} \cdot \left(h_1 - y\right) + g \cdot m_c \cdot s\left(0, x, a_L, x0_L\right) \cdot \left(x - x_L\right) + F_{yR} \cdot \left(L - x\right) \end{array} \right.$$

Решатель

$$\begin{bmatrix} a_L \\ h_L \\ x0_L \\ a_R \\ h_R \\ x0_R \end{bmatrix} := \mathbf{Minimize}\left(PE, a_L, h_L, x0_L, a_R, h_R, x0_R\right) = \begin{bmatrix} 8.55491 \\ -0.65599 \\ 14.54898 \\ 8.59838 \\ 2.47694 \\ 4.32476 \end{bmatrix} \mathbf{m} \qquad PE\left(a_L, h_L, x0_L, a_R, h_R, x0_R\right) = 21.674\ \mathbf{kgf \cdot m}$$

Рис. 9. Задача о цепочке с закрепленной на ней бусинке

Пятое ограничение-уравнение на рис. 9 было сформировано с использованием *элементов программирования* пакета Mathcad [3]. В среде этого пакета, как известно, есть три таких инструмента: использование локальных переменных, объединение операторов в программные блоки и изменение естественного порядка выполнения операторов. В решении, показанном на рис. 9, использованы только два первых инструмента: стрелочка влево – это локальное присваивание значения переменной, которая видима только в программном блоке, отмеченном двойной вертикальной чертой справа и одинарной вертикальной чертой слева. Третий элемент (инструмент) программирования был описан в [3]. Там с помощью цикла с параметром (цикла for) рассчитывался момент силы через разбиение кривой на отдельные участки (метод конечных элементов). Тут просматривается некая «троица» математического анализа: *сумма* переходит в *интеграл*, а в интеграле просматривается *первообразная*.

На рисунке 9 показано, какая потенциальная энергия будет у нашей цепочки с бусинкой при значениях параметров оптимизации, заданных первым приближением, и после оптимизации. Пакет Mathcad выдает эти величины в джоулях (J), но мы перевели из в килограммы-силы, умноженные на метры. Джоули[20] будут выдаваться и при расчетах моментов сил – см. рис. 8. Но мы опять же эти величины будем «выдавать на печать» в kgf · m. Здесь разные физические величины имеют одинаковые единицы измерения. Это одна из недоработок СИ.

На рисунке 10 графически отображено решение задачи о цепочке с зафиксированной на ней бусинкой.

[20] Джеймс Прескотт Джоуль (1818- 1889) был теплотехником, но его тоже каким-то боком можно причислить к математикам – он первым рассчитал эквивалент тепловой и механической энергии: в одной калории содержится 4.19 джоулей. Во многих странах мира 14-го марта отмечают день математики. Авторы (преподаватели Московского энергетического института) предлагают 19-го апреля праздновать день теплотехника. Кстати, цепной функции, в гиперболическом косинусе и синусе (см. рис. 4) запрятана вторая важная математическая константа – число е, в котором дважды «запрятан» год рождения Льва Толстого – 2.718281828. Это число носит имя Эйлера. Но у нас тут часто вспоминают не великого, в том числе и российского математика, а великого русского писателя.

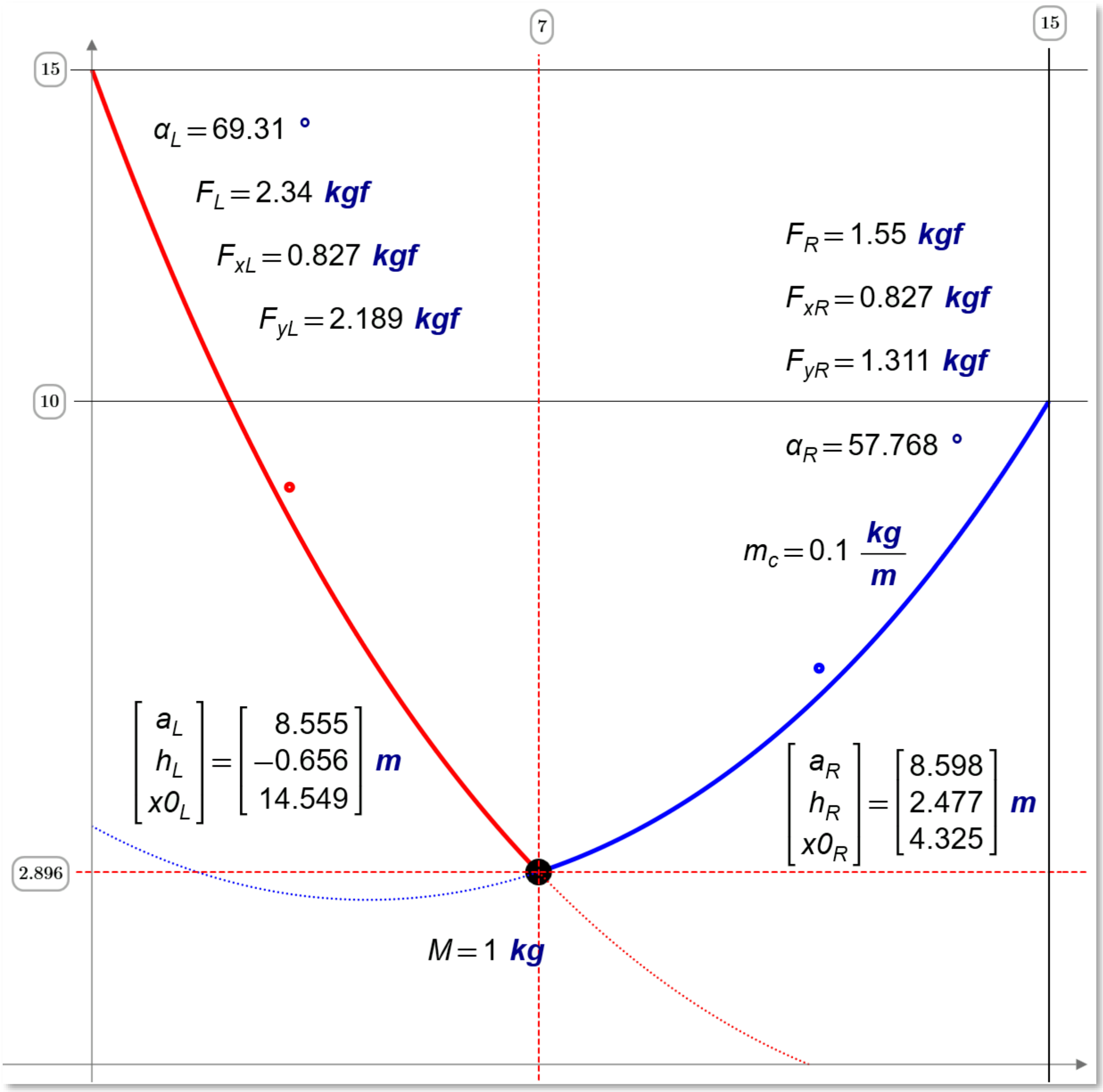

Рис. 10. Бусинка отстаит на 7 метров от левого края крепления цепочки

С бусинкой, показанной на рис. 10 тоже можно поиграть. На сайте статьи помещена анимацию движения бусинки слева направо (моделирование работы подвесной канатной дороги).

Задача, отображенная на рисунках 9 и 10, поставлена не совсем корректно. Очень трудно физически закрепить бусинку точно на расстоянии x от левого края. Бусинку можно закрепить на цепочке, лежащей горизонтально, отмерив расстояние от левого края, а потом подвесить ее. При таком подходе к задаче заданной константой будет уже не значение x, а длина отрезка цепочки от ее начала до бусинки S_1. В этом случае параметров оптимизации будет уже не шесть, а семь – добавиться еще параметр x. Тут для правильного решения задачи нужно будет добавить еще одно ограничение (равенство) – баланс моментов сил относительно еще одной точки – точки крепления цепочки слева – см. рис. 11.

$$\cancel{s(0,x,a_L,x0_L)+s(x,L,a_R,x0_R)=S} \qquad S_1+s(x,L,a_R,x0_R)=S$$

$$\left\| \begin{array}{l} x_L \leftarrow x_{cg}(0,x,a_L,x0_L) \\ x_R \leftarrow x_{cg}(x,L,a_R,x0_R) \\ g \cdot m_c \cdot s(0,x,a_L,x0_L) \cdot x_L + g \cdot M \cdot x + g \cdot m_c \cdot s(x,L,a_R,x0_R) \cdot x_R \end{array} \right. = \left\| \begin{array}{l} \alpha_L \leftarrow -atan(F'(0,a_L,x0_L)) \\ \alpha_R \leftarrow atan(F'(L,a_R,x0_R)) \\ F_{yR} \leftarrow \dfrac{G \cdot \cos(\alpha_L) \cdot \sin(\alpha_R)}{\cos(\alpha_R) \cdot \sin(\alpha_L) + \cos(\alpha_L) \cdot \sin(\alpha_R)} \\ F_{xR} \leftarrow \dfrac{G \cdot \cos(\alpha_L) \cdot \cos(\alpha_R)}{\cos(\alpha_R) \cdot \sin(\alpha_L) + \cos(\alpha_L) \cdot \sin(\alpha_R)} \\ F_{yR} \cdot L + F_{xR} \cdot (h_1 - h_2) \end{array} \right.$$

Рис. 11. Еще одно ограничение в решении задачи о цепочке с закрепленной бусинкой

Но при такой постановке задачи можно поступить иначе – оставить только шесть параметров оптимизации, менять вручную значение x и методом последовательных приближений добиваться заданного значения длины левого отрезка цепочки.

Почему в задаче о бусинке, скользящей по цепочке, равное число параметров оптимизации и число ограничений-уравнений, а в задачах о бусинке, закрепленной на цепочке, ограничений-уравнений меньше, чем параметров, можно понять, вспомнив о *степени свободы* в механике. Для расчетов степеней свободы механизмов применяется формула Чебышёва — Граблера — Кутцбаха[21]. Эта формула учитывает помимо прочего и число звеньев механизма. Но у цепочки бесконечное число звеньев. Как тут быть? Сколько степеней свободы у цепочки, составленной из n звеньев?

Описанный метод расчета годится и для объемных конструкций. Такой, например. Берется две цепочки. Они подвешиваются к потолку в четырех точках, а к их серединам подвешивается третья цепочка с грузом или без груза. Как все это будет провисать?

А теперь вернемся к нашим великим математикам!

Часто можно услышать такой риторический вопрос: «Как бы сейчас выглядело дифференциальное исчисление, если б у Ньютона (и у других великих математиков, перечисленных выше) был бы компьютер?!» Риторический вопрос – это, как известно, вопрос, не требующий ответа, но мы попытаемся его дать.

У истории не бывает сослагательного наклонения, но… Одни считают, что если бы у Ньютона был компьютер, то никакого дифференциального исчисления не было бы. А было бы нагромождение решенных и якобы решенных задач, множество таблиц и кривых на дисплеях компьютеров, обобщить которые было бы чрезвычайно трудно – «голь (люди без компьютера) на выдумки хитра». Другие же утверждают, что «компьютеризированный Ньютон» помог бы нам избежать многих ошибок и заблуждений, уберег бы от поисков аналитических решений там, где их нет, что в конце концов, привело бы к более бурному развитию науки и техники в целом и математики в частности. Но близкий к истине ответ, наверно, таков: «Если б у Ньютона был

---

[21] Пафнутия Львовича Чебышёва (1821-1894) мы точно пригласим в нашу аудиторию. Он как любой грамотный русский инженер и ученый знает немецкий, французский и английский языки и поможет нам общаться со слушателями. О механике Граблере Интернет молчит. О Франце Карле Кутцбахе (1875-1942) в Сети сказано, что этот инженер-механик был профессором Дрезденского университета.

компьютер, то это бы означало, что... дифференциальное исчисление как наука уже существовала в течение трехсот лет до Ньютона, а сам Ньютон (один из создателей дифференциального исчисления) носил бы другое имя...».

Читатель может сам пофантазировать, как вышеотмеченные великие математики реагировали бы на вышеприведенное решение нашей простенькой задачи, в которой запрятаны многие положения высшей математики, и как бы они восклицали: «Вот если б у меня был компьютер!» или, наоборот: «Слава богу, что у меня не было компьютера!».

А теперь проведем среди наших математиков олимпиаду с такими задачами.

1. Решить задачу о цепочке со скользящей по ней бусинкой не численно (см. выше), а аналитически. Сначала принять, что $h_1 = h_2$, а потом снять это ограничение. Результатом расчета должна быть функция с аргументами h_1, S, L, h_2, M и m_c. Возвращать же эта функция должна координаты цепочки x и y и/или стрелу ее провеса.
2. Найти соотношение длины цепочки без бусинки и расстояния между точками крепления цепочки ($h_1 = h_2$), при котором сила крепления цепочки будет минимальна [4, 10, 12].
3. Рассчитать изменение площади сечения цепочки с бусинкой и/иди без нее так, чтобы удельная сила ее растяжения была постоянной величиной по ее длине.
4. Рассчитать изменение площади сечения цепочки так, чтобы она провисала по параболе, гиперболе, дуге эллипса.
5. Замкнуть цепочку и накинуть ее на гардеробные плечики – на равнобедренный треугольник с тупым верхним углом. Определить угол, при котором замкнутая цепочка будет соскальзывать с плечиков. Силами трения пренебречь [10, 12].
6. Заменить «плечики» на прямой круговой конус и проанализировать поведение замкнутой цепочки на нем [15]. Силы трения не учитывать.
7. Вбить в стену два гвоздя и повесить на них замкнутую цепочку. Как она будет себя вести, если опять же силы трения не учитывать [10].
8. Решить задачу о цепочке с бусинкой через решение системы уравнений, описывающих балансы сил и моментов сил, а не через минимизацию потенциальной энергии.
9. Заменить цепочку на резинку, степень растяжение которой подчиняется закону Гука. Учитывать изменение линейной массы цепочки при растяжении.
10. Подвесить на цепочку две (три и более) закрепленных бусинок с разной массой.
11. Написать книгу «Введение в механику гибкой нити: работаем с компьютером»

Поставленные задачи можно и нужно решать *гибридно* [16], то есть сочетая аналитические и численные методы. Ну и, конечно, используя «специфику» человека и компьютера. Что авторы попытались показать в данной статье. Заодно обрисовать технологию STEM в образовании, когда в рамках одного занятия охватываются темы, прямо связанные с наукой (S – science), с технологиями (T – technology), с инженерным делом (E –

Engineering) и, конечно, с математикой (M – mathematic). В эту аббревиатуру можно добавить и букву A (art – искусство: STEAM).

References:

1. В. Ф. Очков, Н. А. Очкова. Проект памятника трем математикам или Матметрия // Cloud of Science. Том 4 № 4. 2017. С. 548-571 (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/MathMetria.pdf)
2. Очков В. Ф., Богомолова Е. П., Мати Хейнлоо. Решатели или Великолепная семерка Mathcad // Открытое образование. № 3. 2015. С. 37-50 (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Solvers-OE.pdf)
3. Очков В. Ф., Богомолова Е. П., Иванов Д. А. Программное уравнение или ФМИ // Cloud of Science. Т. 2, № 3. 2015. С. 473-515 (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/PMI.pdf)
4. Сайт с расчетом провисания каната между опорами подъемника https://studwood.ru/1605299/tehnika/raschet_parametrov_provisaniya_kanata_oporami_podemnika
5. Сергей И. И., Бладыко Ю. В. Механический расчет гибких проводов воздушных линий с заградительными шарами // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. Т. 61. № 4. 2018 (https://cyberleninka.ru/article/v/mehanicheskiy-raschet-gibkih-provodov-vozdushnyh-liniy-s-zagraditelnymi-sharami)
6. C. Y. Wang. Optimum Length of a Heavy Cable with a Concentrated Load // Journal of Engineering Mechanics, Volume 143; doi:10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001387 (https://www.scilit.net/article/d751605b682ddc8884d4d2057ad5be0c)
7. Меркин Д. В. Введение в механику гибкой нити. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1980 (http://know.alnam.ru/book_gth.php)
8. Jian Qin, Yierta Ba, Yan Ding, Jieming Bai, Hongqiang Zhang. Newton Iteration Method for Analysis of Suspension Cable // Proceedings of the 2015 International Conference on Modeling, Simulation and Applied Mathematics (https://doi.org/10.2991/msam-15.2015.79)
9. Jian Qina, Jun Chen, Liang Qiao, Jiancheng Wan and Yongjun Xia. Catenary Analysis and Calculation Method of Track Rope of Cargo Cableway with Multiple Loads // MATEC Web of Conferences, 82 68201008 (2016) (https://www.matec-conferences.org/articles/matecconf/pdf/2016/45/matecconf_d2me2016_01008.pdf)
10. Очков В. Ф., Нори М., Очкова Н.А. Физико-математическая информатика с цепочкой // Cloud of Science. Том 6 №1, 2019. Стр. 5-47 (https://cloudofscience.ru/sites/default/files/pdf/CoS_21_005.pdf)
11. Очков В. Ф., Цуриков Г. Н., Чудова Ю. В. Осторожно: цепная функция // Информатика в школе. № 4 за 2017 г. С. 58-62 (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Chain.pdf)

12. Очков В. Ф., Нори М. Playing with a chain Or Physical and Mathematical Informatics // Современные информационные технологии и ИТ-образование. Том 14 № 2 (2018) С. 333-343 (http://sitito.cs.msu.ru/index.php/SITITO/article/view/390/309)
13. Очков В. Ф. и др. Цепная линия = физика + математика + информатика // Информатика в школе. № 3. 2018. С. 56-63 (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/catenary.pdf)
14. Очков В. Ф., Ленер Ф., Чудова Ю. В., Капитонец В. К., Тараканова Д. Ю. Физика vs информатика: веревочный многоугольник с гирьками в статике, кинематике и динамике Или Ньютон vs Лагранж // Cloud of Science Том 4 № 2. 2017. С. 147-180 (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Polygon.pdf)
15. Зубелевич О. Э., Самсонов В. А. Цепь на конусе // Сб. науч.-метод. статей. Теоретическая механика. Вып. 30 / Под ред. В. А. Самсонова — М. : Изд-во МГУ, 2018. С. 131–138.
16. Очков В. Ф., Бобряков А. В., Хорьков С. Н. Гибридное решение задач на компьютере // Cloud of Science. Том 4 № 2. 2017. С. 5-26 (https://cloudofscience.ru/sites/default/files/pdf/CoS_14_168.pdf)

Сведения об авторах.

Валерий Федорович Очков НИУ «МЭИ», ОИВТ РАН
Александр Евгеньевич Тарасов НИУ «МЭИ»
Константин Александрович Орлов НИУ «МЭИ», ОИВТ РАН
Евгений Сергеевич Науменко а «МФТИ (НИУ)»
Григорий Михайлович Липкин школа 1502 при МЭИ