В. Ф. Очков, В. Л. Чудов, А. В. Соколов,

Национальный исследовательский университет МЭИ, Москва

Лицей 1502, Москва

…и на Марсе будут яблони цвести

Есть такой советский культовый фильм "Девять дней одного года"[1]. В нем нет погонь и мордобоя, на которые "подсели" современные юные зрители, а есть прекрасные диалоги в исполнении прекрасных актеров: Т. Лавровой, И. Смоктуновского, А. Баталова и др.

Рис. 1. *Кадр из фильма "Девять дней одного года"*

Вот один такой диалог (актеры Евгений Евстигнеев и Михаил Казакова):

[1] Его можно посмотреть на сайте http://kino-ussr.ru/main/217-devyat-dney-odnogo-goda-1961.html. Название статьи – это, кстати говоря, строка из песни тех времен.

– Скажите, Валерий Иванович, как глубоко Вы собираетесь забраться в глубины нашей Галактики?

– На 500 световых лет.

– С какой скоростью?

– Близкой к скорости света.

– Вес корабля?

– Сто тысяч тонн.

– Горючее?

– Самое современное.

– Сейчас мы подсчитаем сколько вам понадобится горючего. Будьте добры, салфеточку.

…

– Николай Иванович, Вы закончили свои подсчеты?

– Да, пожалуйста. При весе космического корабля сто тысяч тонн при скорости, близкой к скорости света, для облета части Галактики в разумный для человеческой жизни срок Вам потребуется десять в двадцать второй степени тонн самого современного экстра-горючего. Справка. Наша планета весит несколько меньше, счастливого пути!

Представим себе, что у персонажа Евгения Евстигнеева (см. рис. 1) в руках не салфетка, а… таблетка (планшетный компьютер) с программой Mathcad [1-6], и попытаемся на нем воспроизвести в среде Mathcad эти расчеты – см. рис. 2.

$$v_{end} = I \cdot \ln\left(\frac{M_1}{M_2}\right) \xrightarrow{solve, M_1} M_2 \cdot e^{\frac{v_{end}}{I}}$$

$$M_2 := 100 \cdot 1000 \ \text{т}$$

$$v_{end} := 0.995 \ c = 298\ 1000 \ \text{км/с}$$

$$I := 777 \cdot 1000 \ \frac{\text{тс}}{\text{т/с}}$$

$$M := M_2 \cdot \exp\left(\frac{v_{end}}{I}\right) - M_2 = \ 1.003 \cdot 10^{22} \ \text{т}$$

$$M_{Earth} := 5.97219 \cdot 10^{21} \ \text{т}$$

Рис. 2. *Предположение расчета на салфетке*

В расчете использована формула Циолковского (кстати, он упоминается в конце вышеприведенного диалога[2]): конечная скорость ракеты v_{end} пропорциональна натуральному логарифму отношения стартовой массы ракеты M_1 к конечной массе M_2. Разность же $M_1 - M_2$ – это масса топлива и окислителя (далее просто топлива – как в фильме). Коэффициент пропорциональности в этом уравнении (величина I) – это отношение тяги двигателя к массовому расходу топлива μ (величины F и μ мы будем использовать в дальнейших расчетах). В расчете на рисунке 2 мы приняли I равным 777 тысяч тонн силы/(тонн/с). Но в самом фильме эта цифра не озвучена – 777 тысяч тонн это наше предположение (три семерки на счастье!). Величина I – это скорость истечения газов из сопла ракеты. Теоретическое значение для ядерных двигателей может превышать 70 км/с. Скорость истечения для электрического двигателя может достигать 140 км/с. Поэтому вполне можно помечтать о "трех семерках".

Уравнение Циолковского на рисунке 2 решается относительно переменной M_1. Если конечная скорость ракеты будет близка к скорости света (0.995 c), то масса топлива и вправду превысит массу Земли. Но расчет наш, конечно, очень грубый. Кроме того, он не учитывает то обстоятельство, что при скоростях, близких к скорости света формула Циолковского не работает. Тут нужно будет прибегать к теории относительности Эйнштейна.

Но давайте опустимся с галактических высот к околоземному пространству, немного притормозим ракету и подсчитаем, какие параметры могут быть у реальных, а не у полуфантастических космических аппаратов.

На рисунке 3 сделана попытка расчета скорости ракеты, имеющей стартовую массу 250 тонн, из которых 10 тонн – это полезная нагрузка (P), а 40 тонн – это масса пустой ракеты-носителя (m), а 200 тонн – масса топлива (M). Тяга двигателя ракеты (F) составляет 2000 тонн силы при расходе топлива 5 тонн в секунду (μ). Нетрудно подсчитать, что двигатель будет работать 40 с (t_{end}).

На рисунке 3 показано численное решение дифференциального уравнения сил: веса ракеты и тяги двигателя, сообщающих ускорение ракете – первый производной ее скорости по времени [7].

Численное решение $v(t)$ сравнивается с аналитическим $v_{sym}(t)$ найденным с помощью сайта пакета Mathematica – см. рис. 4. Этим действием мы фактически вывели формулу Циолковского, использованную в решении на рис. 2, дополнительно вставив в нее учет ускорения свободного падения (веса ракеты). Но константа g – это не константа, а переменная величина и об этом мы поговорим ниже.

---

[2] Персонаж Казакова бросает своему оппоненту (персонаж Евстигнеева) такую фразу: "Когда Циолковский проектировал свою ракету, то в ресторане Яр сидели ученые-скептики вроде вас и на салфеточках доказывали, что он сумасшедший".

$P := 10$ **т** Полезная нагрузка

m	M	F	μ	t_{end}
(т)	(т)	(тс)	(т/с)	
40	200	2000	5	$\frac{M}{\mu}$

Решить

$$h(0\ \mathbf{с}) = 0\ \mathbf{м} \qquad v(0\ \mathbf{с}) = 0\ \mathbf{км/с} \qquad v(t) = h'(t)$$

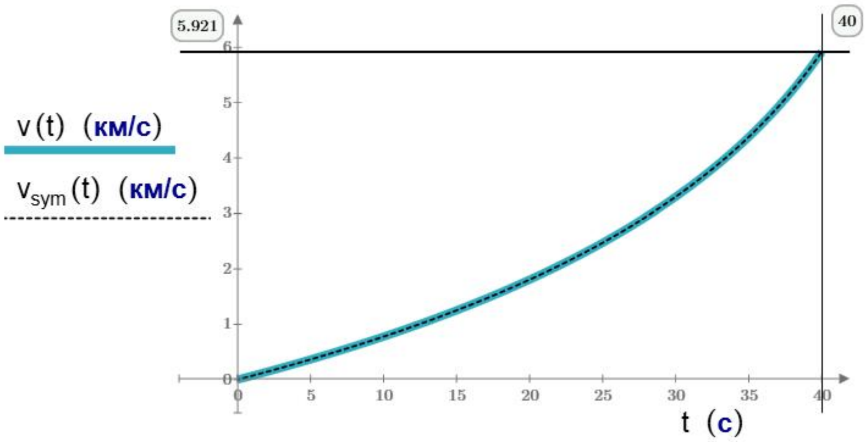
$$(P + m + M - \mu \cdot t) \cdot v'(t) + (P + m + M - \mu \cdot t) \cdot g = F$$

$$\begin{bmatrix} h \\ v \end{bmatrix} := \mathbf{Odesolve}\left(\begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, t_{end}\right) \qquad t := 0\ \mathbf{s}, \frac{t_{end}}{300} .. t_{end}$$

$$v_{sym}(t) := \left\| \begin{array}{l} I \leftarrow \frac{F}{\mu} \\ I \cdot \ln\left(\frac{P + m + M}{P + m + M - \mu \cdot t}\right) - g \cdot t \end{array} \right.$$

$v(t_{end}) = 5.921$ **км/с**

$h(t_{end}) = 85.9$ **км**



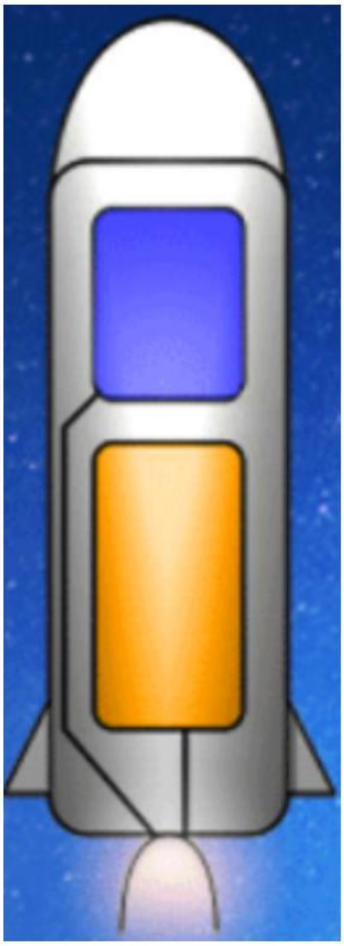


Рис. 3. Расчет одноступенчатой ракеты

Если в уравнении перенести вес ракеты $(P+m+M-\mu t)\ g$ в правую сторону со знаком «минус», то получится II закон Ньютона в чистом виде. Математически, конечно же, это ничего не изменит, но будет нагляднее.

Из расчета на рисунке 3 видно, что скорость ракеты в конце работы двигателя не достигает первой космической скорости (≈ 7.9 км/с), и ракета после ее разворота на 90° (это делают дополнительные двигатели или гироскопы) полетит по баллистической, а не по околоземной орбите. На графике рис. 3 прорисована не одна точка, а две кривые: толстая бледная и тонкая черная внутри толстой кривой. Так проверяется совпадение численного и аналитического (символьного решения дифференциального уравнения).

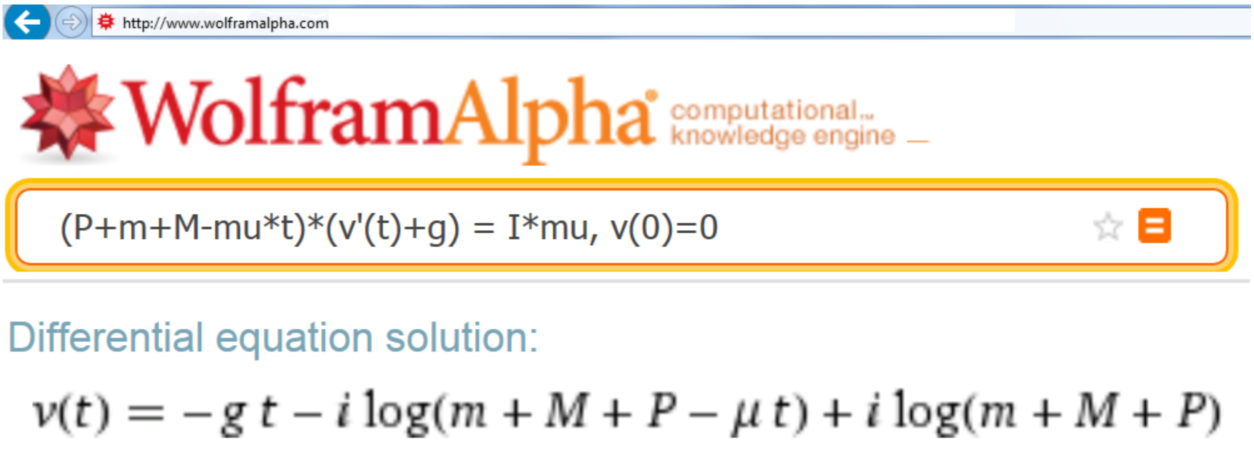


Рис. 4. Вывод уравнения Циолковского

Чтобы все-таки вывести наши 10 т полезной нагрузки на околоземную орбиту, можно увеличить запас топлива или… делить ракету на две ступени – см. рис. 5.

$P := 10$ т Полезная нагрузка

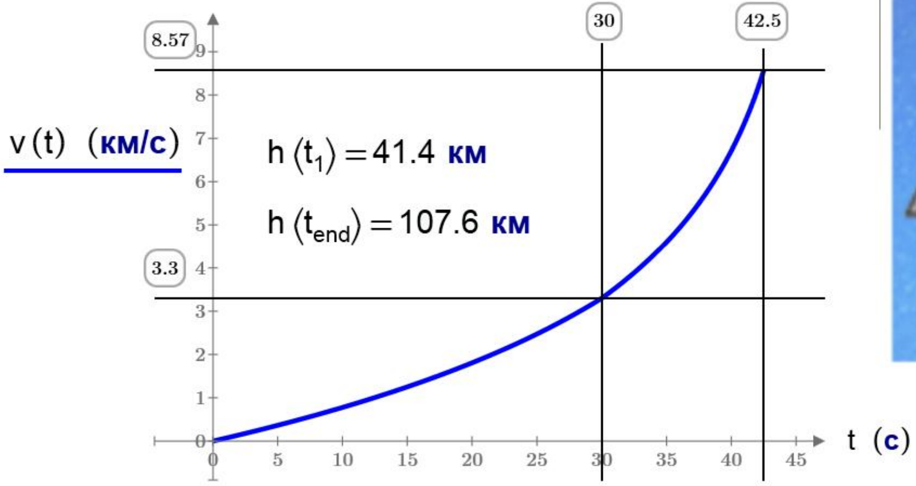
Ступень	m (т)	M (т)	F (тс)	μ (т/с)
1	35	150	2000	5
2	5	50	1500	4

$$t_1 := \frac{M_1}{\mu_1} = 30\ \mathbf{s} \qquad t_{end} := t_1 + \frac{M_2}{\mu_2} = 42.5\ \mathbf{s}$$

$$h(0\ \mathbf{с}) = 0\ \mathbf{м} \qquad v(0\ \mathbf{с}) = 0\ \mathbf{км/с} \qquad v(t) = h'(t)$$

$$\left(v'(t) + g\right) \cdot \left\| \begin{array}{l} \text{if } t < t_1 \\ \quad \left\| P + m_1 + M_1 - \mu_1 \cdot t + m_2 + M_2 \right. \\ \text{else} \\ \quad \left\| P + m_2 + M_2 - \mu_2 \cdot (t - t_1) \right. \end{array} \right\| = \begin{array}{l} \text{if } t < t_1 \\ \quad \left\| F_1 \right. \\ \text{else} \\ \quad \left\| F_2 \right. \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} h \\ v \end{bmatrix} := \mathbf{Odesolve}\left(\begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, t_{end}\right) \qquad t := 0, \frac{t_{end}}{300} .. t_{end}$$



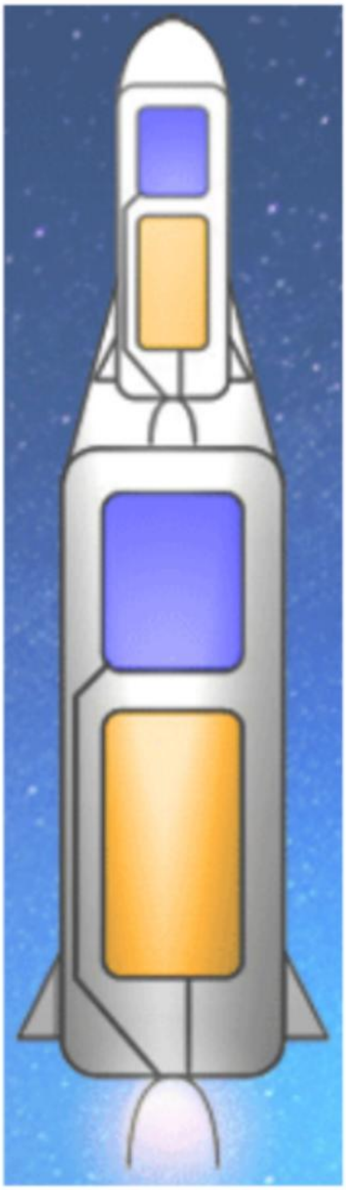


Рис. 5. Расчет полета двухступенчатой ракеты.

Дифференциальное уравнение полета такой ракеты будет содержать функцию if: если работает первая ступень, то она несет полезную нагрузку P, сами две ступени (m_1 и m_2), топливо второй ступени M_2 и расходуемое топливо первой ступени $M_1 - \mu_1 \cdot t$.

Вторая же ступень (else) будет нести только полезную нагрузку P, себе саму m_2 и расходуемое топливо $M_2 - \mu_2 \cdot (t - t_1)$, где t_1 – время работы первой ступени. При таком раскладе скорость ракеты в конце последовательной работы двух ступеней превысит первую космическую скорость.

При этом ракета поднимается на 107.6 км, а не на 85.9 км (одноступенчатый вариант).

Кривые, показанные на рисунках 3 и 5, похожи на… верхнюю образующую монумента покорителям космоса, установленного в Москве – см. рис. 6.

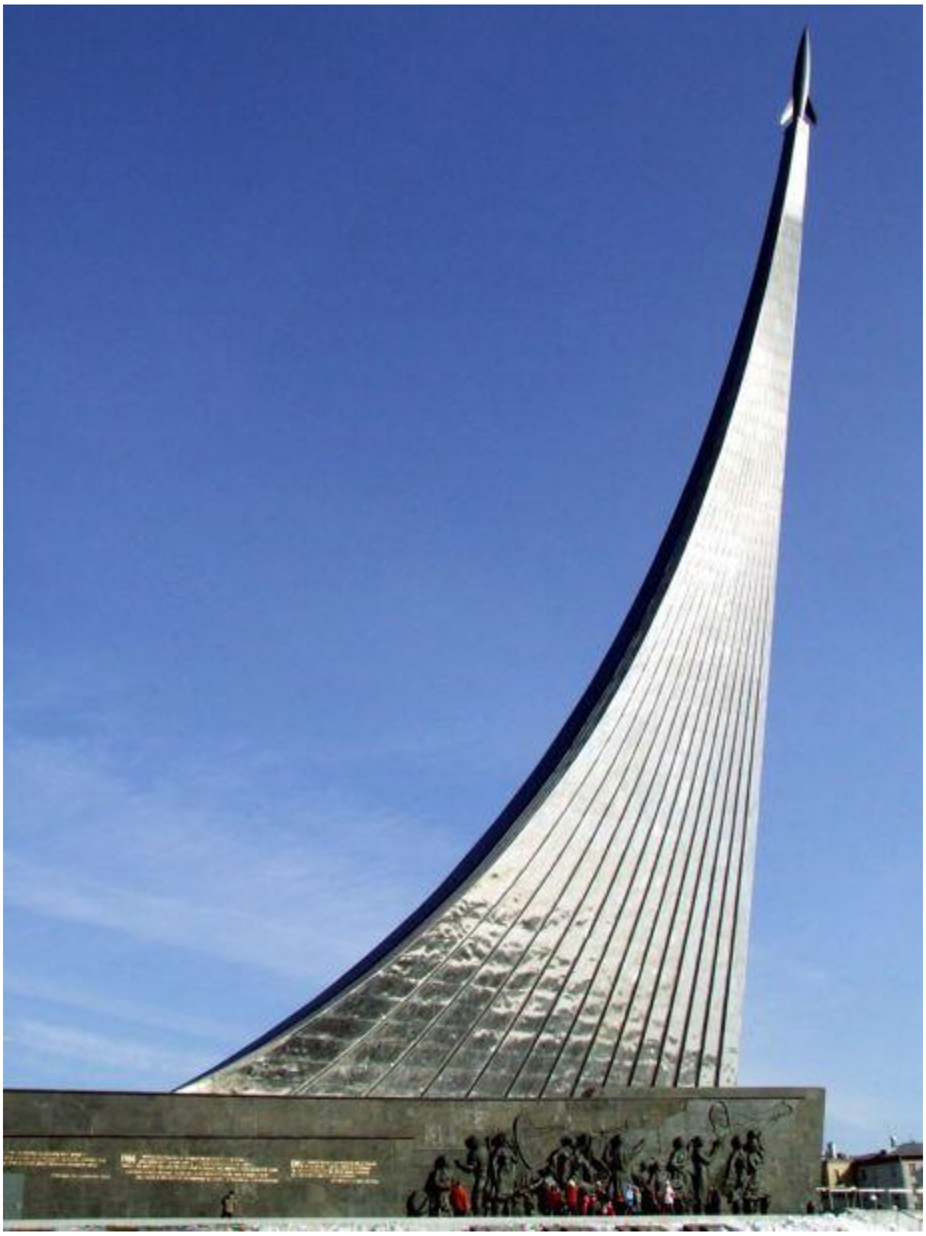


Рис. 6. Монумент покорителям космоса

Интересно, заложена ли формула Циолковского в этот монумент? Памятник Циолковскому стоит у подножия монумента.

В расчетах на рисунках 3 – 5 сделано много допущений[3]: не учитывается действие на ракету потока воздуха, изменение величины ускорения свободного падения от высоты и географической широты. Кстати, о широте. Известно, что старт ракет с Земли нужно осуществлять как можно ближе к экватору и разворачивать орбитальную станцию в восточном направлении. У экватора значение g меньше, чем на более высоких широтах и, во-вторых и главных, ракета получает дополнительный разгон за счет вращения Земли.

[3] В принципе, можно было не учитывать и вес ракеты – произведение ее массы на ускорение свободного падения. Это допущение, как мы уже отметили, заложено в формулу Циолковского.

Есть ещё один «астрономический» фактор: плоскости орбит, не совпадающие с экваториальными, неустойчивы: возмущающее действие Земли, Луны и Солнца «уронят» такой спутник.

На рисунке 7 показано, какое значение дополнительной горизонтальной скорости получают ракеты при запуске их из различных точек Земли – с пяти различных космодромов, а также с полюса и экватора. Если посмотреть на карте места расположения этих космодромов, то окажется, что восточнее их находятся места для падения ступеней ракет – океан или редкозаселенная территория.

$$R := 6370\ km \qquad v(\phi) := \frac{2\ \pi\ R \cdot \cos(\phi)}{day}$$

$$\textit{Полюс} := 90\ ° \qquad v(\textit{Полюс}) = 0\ \frac{km}{s}$$

$$\textit{Плесецк} := 63\ ° \qquad v(\textit{Плесецк}) = 0.21\ \frac{km}{s}$$

$$\textit{Байконур} := 46\ ° \qquad v(\textit{Байконур}) = 0.322\ \frac{km}{s}$$

$$\textit{Цзюцюань} := 41\ ° \qquad v(\textit{Цзюцюань}) = 0.35\ \frac{km}{s}$$

$$\textit{Мыс\_Канаверал} := 28.5\ ° \qquad v(\textit{Мыс\_Канаверал}) = 0.407\ \frac{km}{s}$$

$$\textit{Куру} := 5\ ° \qquad v(\textit{Куру}) = 0.461\ \frac{km}{s}$$

$$\textit{Экватор} := 0\ ° \qquad v(\textit{Экватор}) = 0.463\ \frac{km}{s}$$

Рис. 7. Линейные скорости на поверхности Земли

Ракеты-носители имеют несколько ступеней не только для экономии топлива и окислителя и не только для того, чтобы вывести на орбиту большую полезную массу при заданном количестве топлива и окислителя, но и для того, чтобы отработанные части ракеты не выходили на околоземную орбиту, а падали в заданном районе.

Дискуссия по использованию Mathcad для расчета ракет-носителей размещена на сайте https://www.ptcusercommunity.com/thread/128503.

Сами же задачи статьи решались в рамках факультатива по применению современных систем компьютерной математики лицея 1502 г. Москвы.

Литература:

1. Черняк А. А., Черняк Ж. А., Якимович А. А. Mathcad и Excel для школьников: решение уравнений и неравенств // Информатика и образование, № 3-7, 2009

2. Шушкевич С. В. Обучение построению графических объектов в Mathcad // Информатика и образование, № 5-6, 2009
3. Суханов М. Б. Применение пакета Mathcad в обучении программированию на языках высокого уровня // Информатика и образование. № 10. 2011
4. Шамсутдинова Т. М. Программируем в системе Mathcad // Информатика и образование. № 5. 2006
5. Бгатова О. В. Применение Mathcad при обучении математике в колледже // Информатика и образование. № 11. 2007
6. Очков В. Ф. Преподавание математики и математические пакеты // Открытое образование. № 2. 2013. URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Mathcad-15/OchkovMath.pdf
7. Очков В.Ф., Богомолова Е.П. Это страшное слово дифуры... // Информатика в школе. №1. 2015. URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/ODE.pdf