Обобщенные овалы Колмогорова,
а также
Математик-экспериментатор и математик-теоретик

Валерий Очков

В статье на основе скорректированного определения эллипса, овала Кассини и лемнискаты Бернулли описывается новый вид замкнутых плоских кривых – обобщенных овалов и обобщенных лемнискат, которым можно дать имя Колмогорова. Рассматривается конкретный сценарий проведения занятий по технологии STEM.

Ключевые слова: математики-теоретики, математики-экспериментаторы, эллипс, гипербола, овал Кассини, «гармонический» овал (овал Кэли), экспоненциальный овал, логарифмический овал, среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое, общее среднее, среднее Колмогорова, двух- и трехлепестковая лемниската Бернулли, STEM.

Методическая цель работы – научить школьников и студентов проводить вычислительные эксперименты на компьютере на примере решения конкретной геометрической задачи. **Научная цель** – открыть новый вид замкнутых плоских кривых – овалов Колмогорова (обобщенных овалов).

Сайт с анимациями и расчетными документами - https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/New-ovals/m-p/707718

> Скачки должны были происходить на большом четырехверстном эллиптической формы кругу…
> Лев Толстой. «Война и мир»

Начнем с расшифровки второго названия статьи.

Около века тому назад ученые-физики разделились на две условные группы – *физики-экспериментаторы* и *физики-теоретики*. Первые проводят эксперименты на лабораторных стендах. Вторые же осмысливают полученные экспериментальные данные и на их основе формируют некие новые физические закономерности. Но часто физики-теоретики идут впереди – подсказывают физикам-экспериментаторам в каком направлении и как нужно вести эксперименты или не проводить их вовсе – всё можно обосновать или предсказать теоретически без особых опытов. Для планирования и проведения нового невиданного физического эксперимента иногда требуется больше труда и таланта, чем на создание новой теории. Так что попытки некой сегрегации – разделения этих групп физиков на два сорта – низший и высший, не совсем корректны.

В настоящее время подобное разделение наметилось и у математиков. *Математики-экспериментаторы*, работая на «лабораторном оборудовании» – на компьютерах, создают некие новые математические объекты, проводя вычислительные эксперименты. *Математики-теоретики* затем либо доказывают, что эти объекты уже давно созданы и исследованы безо всяких компьютеров, либо признают, что это на самом деле новые объекты, заслуживающие теоретико-аналитического осмысления. Но математиков-теоретиков и математиков-экспериментаторов не следует путать с «чистыми» математиками и с «нечистыми» математиками – с прикладными математиками, разрабатывающими численные методы решения математических задач, которых также не совсем корректно ранжировать по сортам[1].

А теперь мы поговорим о первом названии статьи, перейдя от довольно условных вводных рассуждений к делу: рассмотрим конкретные примеры, подчеркнув при этом, что предмет исследований математика-экспериментатора может быть успешно использован при организации учебного процесса по технологии STEM. Что это за технология?

Это инновационная технология обучения в школе и вузе, когда на одном уроке с опорой на современные информационные технологии рассматриваются вопросы разных учебных дисциплин: математики, физики, химии, термодинамики, тепломассообмена, гидрогазодинамики, теоретической механики, сопротивления материалов и т. д. И даже гуманитарных дисциплин: литературы (см. эпиграф), истории, политологии и др. Для российского читателя тут более привычными будут термины "междисциплинарные связи" и "когнитивное обучение". Аббревиатура STEM образована из слов Наука (Science), Технология (Technology), Инженерное дело (Engineering) и Математика (Mathematics). Иногда сюда добавляют букву A — Art, Искусство: STEAM, а не STEM. Проблема гуманитаризации технического образования — это важный аспект в работе школы и вуза (см. сноски 3 и 4 ниже).
Информационные технологии при STEM-обучении – это в первую очередь использование современных компьютерных математических программ, получение быстрой справки в Интернете, размещение задачи на профессиональных форумах.
Слово steam по-английски это и водяной пар, который в начале XIX века произвел в мире первую промышленную (теплотехническую) революцию: появились паровые машины, пароходы, паровозы… Автор хочет это особо подчеркнуть потому, что он теплоэнергетик по образованию и преподает в Московском энергетическом институте. Технология обучения STEM/STEAM может способствовать развитию четвертой (цифровой) промышленной революции наших дней (Industry 4). Учитывая стиль счета, принятый в информатике и программировании, можно заметить, что была и нулевая промышленная революция (Industry 0) – тот момент нашей истории, когда появилось колесо.
В немецком языке в ходу другая аббревиатура, более точно обозначающая данную технологию обучения – MINT: M – Mathematik, I – Informatik, N – Naturwissenschaft (Естествознание) и T – Technik. Тут, как тому и положено, на первом месте стоит царица наук математика, получившая второе дыхание с развитием компьютерных символьных, численных и гибридных методов решения задач. Тандем математики и компьютера – это мощная база для нового этапа развития науки и техники. Слово mint, кстати, по-английски – это мята. Данная технология образования призвана *освежить* застоявшийся воздух в помещениях наших учебных заведений.
Дискуссии о роли компьютеров при освоении физико-математических наук часто вспыхивают в школах и вузах. Преподаватели тут высказывают крайние мнения на этот счет. Многие считают, что математику в школе и вузе нужно преподавать и осваивать сугубо «мелом на доске» и «ручкой на бумаге», и что компьютер тут может только навредить. Но, как правило, преподаватели, стоящие на такой крайней позиции, не освоили современные математические программы и имеют с ними только шапочное знакомство, а компьютер используют только для офисных целей: интернет, электронная почта, электронная книга, пишущая машинка… Девиз таких преподавателей: «Старую собаку новым фокусам не научишь!». Правда они по понятным причинам это не афишируют и обосновывают свою позицию другими, более извинительными доводами. Другие же преподаватели математики,

[1] Тут можно вспомнить старую байку в том плане, что прикладной математик отличается от математика примерно так, как милостивый государь от государя. Прикладные математики, в частности, создают расчетные программы для компьютеров, с которыми работают математики-экспериментаторы.

освоившие компьютер до уровня своей специальности, используют его на занятиях наряду с «доской и мелом». И таких специалистов становится все больше и больше.
Второй вопрос: нужно ли уроки математики дополнять примерами из других дисциплин или нужно преподавать сугубо чистую математику без примеси прикладных наук. Тут также сосуществуют крайние точки зрения.
Ну и третье. В настоящее время процесс решения инженерных задач и задач математической физики сделал резкий крен от аналитических к численным методам. Но преподавание математики в школе и в вузе по-прежнему базируется, в основном, на «аналитике», а не «цифре». Это также является темой острых дискуссий.
Недавно в СМИ промелькнула сообщение о том, что в старших классах Финляндии отменили предметы. Теперь урок в школе заточен не на разбор и заучивание положений какой-либо конкретной учебной дисциплины, а на решение прикладной задачи, на исследование объекта с привлечением знаний изо всех учебных дисциплин, изучаемых в школе.
Опыт ведения занятий по технологии STEM будет расширяться по мере роста числа преподавателей нужной квалификации и соответствующих разработанных и апробированных задач.

Итак, вот конкретная задача, где переплетены математика и информационные технологии.

1. Эллипс, о котором упоминал Толстой (см. эпиграф и сноску 3)

Эллипс – это довольно простой и давно уже изученный математический объект. Но и из него можно «выжать» что-то новенькое, осуществив некие математические эксперименты на компьютере. А насколько это новое!? Об этом будут судить математики-теоретики (см. выше).

Для начала давайте несколько изменим определение эллипса и применим новый метод его построения на декартовом графике.

Эллипс – это геометрическое место точек на плоскости, у которых *среднее арифметическое* расстояний до двух фокусов L_1 и L_2 постоянно и равно заданному значению L. Если здесь слова *среднее арифметическое* заменить на слово *сумма* (удвоенное среднее арифметическое), то мы вернемся к старому классическому определению эллипса. Это вроде бы ничего не значащий нюанс открывает новую интересную тему математических экспериментов, описанных ниже.

Новый способ построения эллипса, немыслимый в докомпьютерную эру, таков. На рисунке 1 показано, как эллипс строится в среде Mathcad *методом сканирования* [1] с использованием нашего нового определения эллипса. Для этого точки на плоскости в заданной области (x_1-x_2, y_1-y_2) двойным циклом с параметром (цикл for) проверяются на принадлежность к эллипсу. Задействован пользовательский булевый оператор примерно равно[2]: если он возвращает «Да» (среднее арифметическое mean расстояний от текущей точки до двух фокусов *примерно* равно заданной величине L), то эта точка с координатами x и y запоминается в векторах X и Y, которые затем отображаются на графике. Меняя значения переменных n (число разбиений осей на точки) и T (представление о том, что такое примерно равно), а также настройки декартового графика пакета Mathcad, можно добиться компромисса между качеством графика и длительностью его построения. Один участок эллипса на рис. 1 увеличен для того, чтобы читателю было ясно, что наш эллипс – это не сплошная замкнутая кривая линия, а набор отдельных точек, удовлетворяющих не абсолютно точному, а нашему приближенному определению эллипса.

[2] Численные методы решения задач часто называют *приближенными*.

$x_1 := 0\text{cm}$ $\quad x_2 := 10\text{cm}$ $\quad y_1 := 0\text{cm}$ $\quad y_2 := 10\text{cm}$

$x_{F1} := 3\text{cm}$ $\quad x_{F2} := 6\text{cm}$ $\quad y_{F1} := 4\text{cm}$ $\quad y_{F2} := 6\text{cm}$

$L := 3\text{cm}$ $\quad n := 3000$ $\quad T := 0.001$

$$\approx(a,b) := \left|\frac{a-b}{a+b}\right| < T$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} := \left| \begin{array}{l} i \leftarrow 0 \\ \text{for } x \in x_1, x_1 + \dfrac{x_2 - x_1}{n} .. x_2 \\ \quad \text{for } y \in y_1, y_1 + \dfrac{y_2 - y_1}{n} .. y_2 \\ \quad\quad \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \sqrt{(x_{F1} - x)^2 + (y_{F1} - y)^2} \\ L_2 \leftarrow \sqrt{(x_{F2} - x)^2 + (y_{F2} - y)^2} \\ \text{if } \operatorname{mean}(L_1, L_2) \approx L \\ \quad \left| \begin{array}{l} X_i \leftarrow x \\ Y_i \leftarrow y \\ i \leftarrow i + 1 \end{array} \right. \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$\operatorname{last}(X) = 20877 \qquad i := 50$

$$L_1 := \sqrt{(x_{F1} - X_i)^2 + (y_{F1} - Y_i)^2} = 1.37\,\text{cm}$$

$$L_2 := \sqrt{(x_{F2} - X_i)^2 + (y_{F2} - Y_i)^2} = 4.641\,\text{cm}$$

$\operatorname{mean}(L_1, L_2) = 3.006\,\text{cm} \qquad L = 3\,\text{cm}$

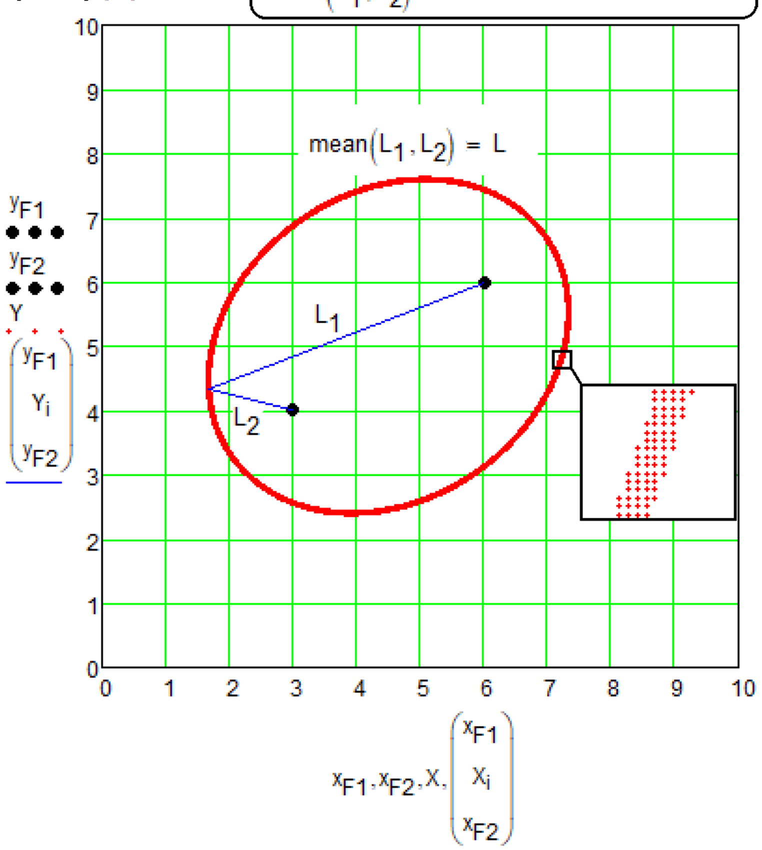


Рис. 1 Построение эллипса методом сканирования с опорой на функцию mean

Из информации в рамке на рис. 1 также видно, что из 9 006 001 точек (3 001·3 001) 20 878 точек формируют эллипс. 68 точек оказались в квадратике. Об этих 68 точках будет рассказано в сноске 8 ниже. От 50-й точки подсчитаны расстояния до фокусов L_1 и L_2, среднее арифметическое которых примерно равно значению L.

На сайте статьи кроме файла с расчетом, показанным на рис. 1, помещен файл, где овал рисуется не сканированием, а с использованием функции с именем implicitplot2d(), предложенной Вячеславом Мезенцевым для построения графиков функций вида f(x, y)=0.

Метод, показанный на рисунке 1, легко модифицируется для построения другой кривой второго порядка – гиперболы. Для этого достаточно конструкцию mean(L_1, L_2) заменить на конструкции mean(-L_1, L_2) – первая ветвь гиперболы и mean(L_1, -L_2) – вторая ветвь (см. рис. 14 ниже). Если же функцию mean заменить на функцию gmean (среднее геометрическое), то будет построена «напарница» эллипса – замкнутая кривая четвертого порядка – овал[3] Кассини.

Но в среде Mathcad кроме функций mean (среднее арифметическое) и gmean (среднее геометрическое) есть функция hmean – *среднее гармоническое*[4] (Бог любит троицу!). Если использовать эту функцию вместо функций mean или gmean, то можно получить замкнутые кривые, показанные на безымянных рисунках 2-6.

---

[3] В английском языке термин *an oval* означает любую гладкую замкнутую плоскую кривую. В русском же языке слово овал означает сугубо выпуклую гладкую замкнутую кривую, которую любая прямая пересекает только в двух точках. В этом смысле овал Кассини, например, не всегда является овалом (см. рисунки 2-6): при уменьшении значения L у этого овала появляется «талия» («осиная талия» у лемнискаты Бернулли – рис. 3), а потом этот «овал» распадается на два отдельных настоящих овала (рис. 2). Если вернуться к эпиграфу статьи, то можно предположить, что Толстой имел ввиду, что беговая дорожка ипподрома («гипподрома» у Толстого) имела овальную форму, а не эллиптическую.

[4] Тут сразу вспоминаются школьные *арифметическая* и *геометрическая прогрессии*. Арифметическая прогрессия — прогрессия, каждый следующий член которой равен предыдущему, увеличенному на фиксированное для прогрессии число. Геометрическая прогрессия — прогрессия, каждый следующий член которой равен предыдущему, умноженному на фиксированное для прогрессии число. Читаем у Достоевского в романе «Идиот» «Наконец, уж одно то, что с каждым годом, например, росло в геометрической прогрессии их состояние и общественное значение; следственно, чем больше уходило время, тем более выигрывали и дочери, даже как невесты». Достоевский как инженер по образованию, конечно, знал, что такое геометрическая прогрессия, и что при определенных условиях она может расти очень медленно – медленней, чем арифметическая прогрессия, если знаменатель геометрической прогрессии ненамного больше единицы. Тут Достоевский просто подчеркивает, что это не простая «маленькая» арифметическая, а сложная «большая» геометрическая прогрессия. Но есть и *гармоническая прогрессия*, о которую мало кто знает. Можно сказать, что мой вклад в банке растет по геометрической прогрессии (что имеет место на самом деле – вспомним о проценте по вкладу), а по гармонической прогрессии – не медленно (низкий процент по вкладу), но и не очень быстро (высокий процент, но деньги вложены в рисковые финансовые операции, которые могут лопнуть). Это утверждение будет схоже с цитатой из Достоевского в том смысле, что оно опирается не на математику, а на художественность образа, на метафору. Гармоническая прогрессия, если кто не знает или забыл, — это прогрессия, образованная обратными элементами арифметической прогрессии. Кстати, есть еще и гибрид арифметической и геометрической прогрессий, от которых тоже можно сгенерировать сложную гармоническую прогрессию.

На рисунке 2 эллипса ещё нет, так как значение L (1.5 cm) меньше половины расстояния между фокусами (2 cm)[5]. Это расстояние мы обозначим как S. Его несложно подсчитать, имея координаты фокусов.

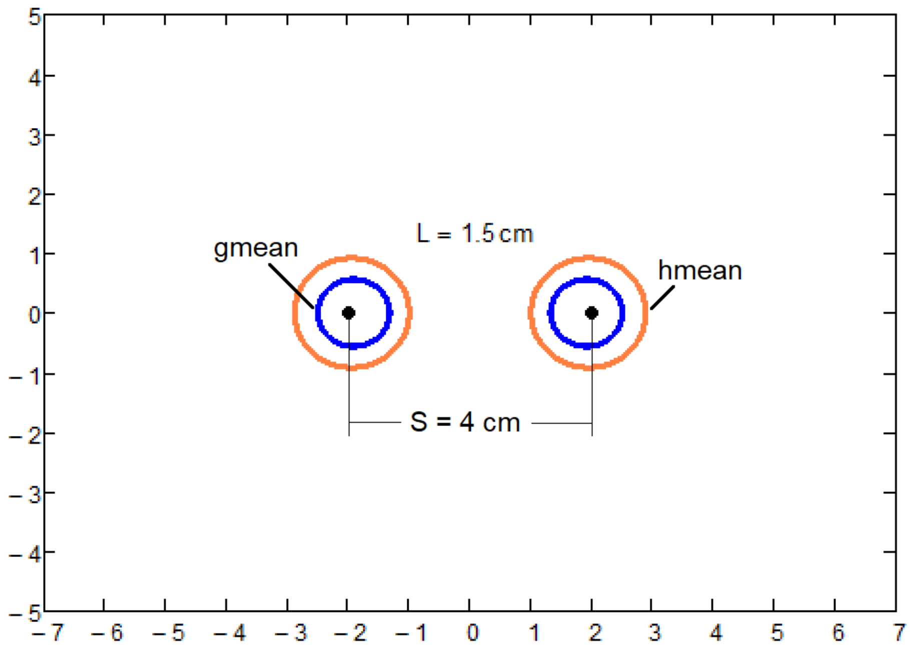


Рис. 2

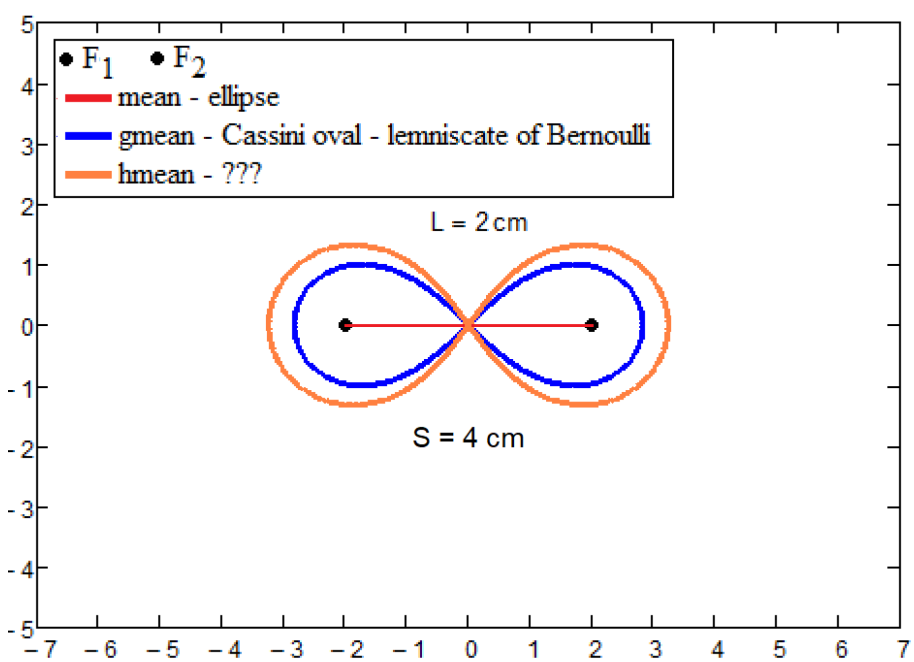


Рис. 3 – см. также рис. 24

[5] Задачи решаются с использованием единиц длины. Это (работа с физическими величинами, а не с голыми цифрами) новый тренд в компьютерных расчетах, позволяющий избежать некоторых досадных ошибок (опечаток) при вводе формул [2].

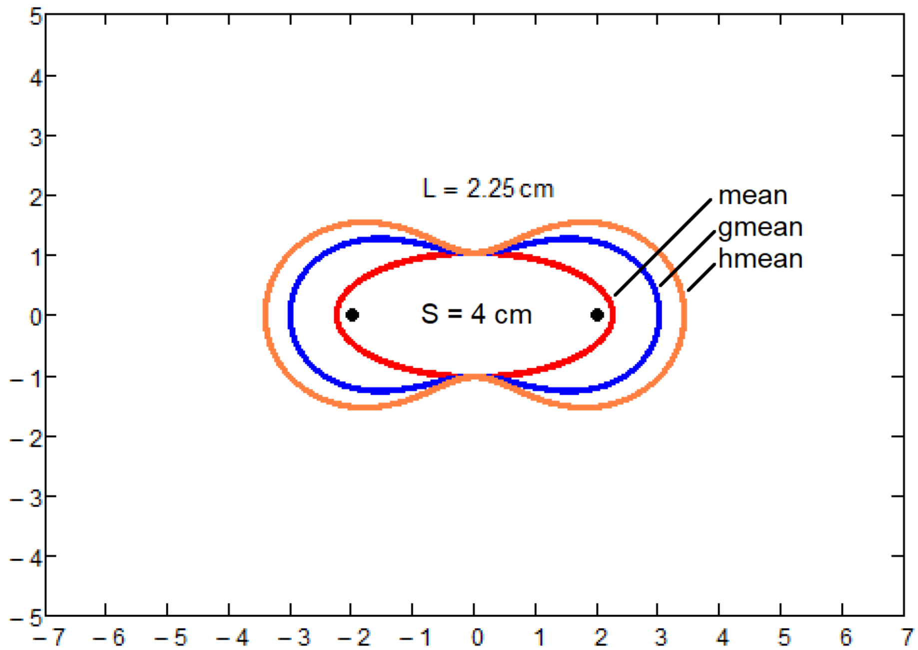


Рис. 4

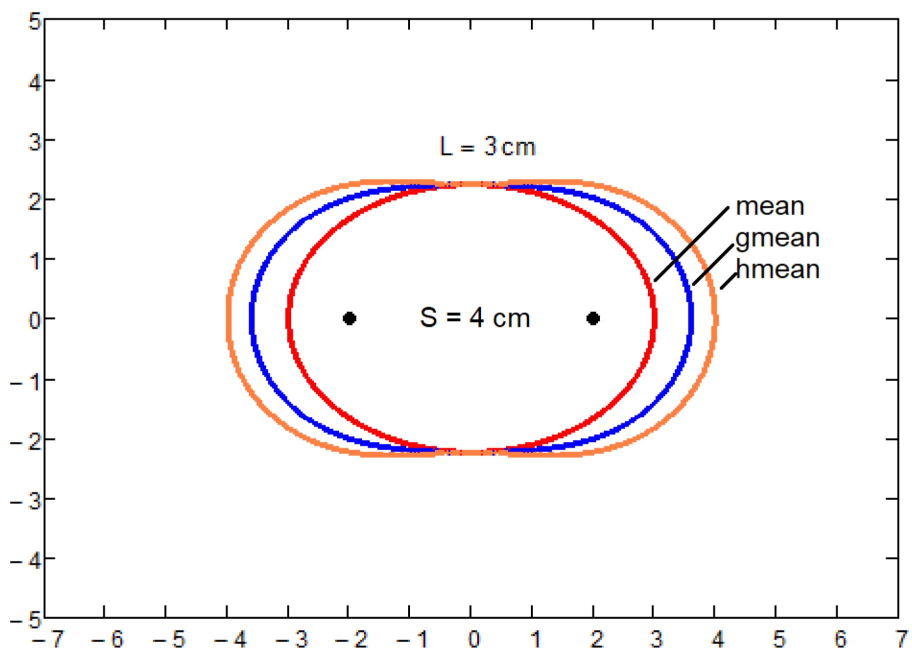


Рис. 5

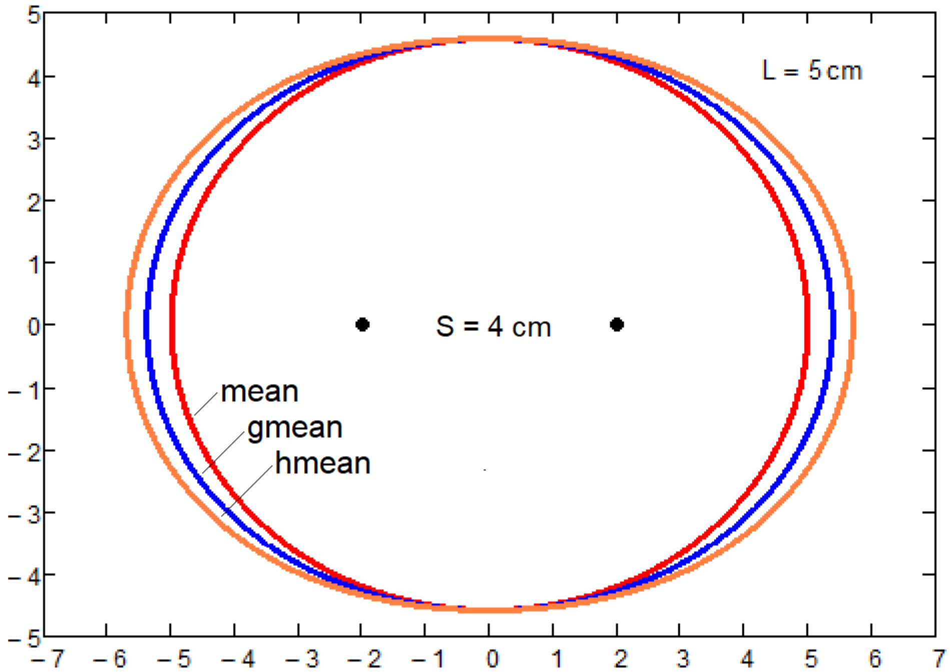


Рис. 6

Особо интересен рисунок 3, где при увеличении значения L (S = 2L) эллипс наконец-то стал просматриваться, но представляет собой отрезок прямой, соединяющей фокусы (вырожденный эллипс), а овал Кассини приобретает особую «именную» форму *лемнискаты Бернулли* с «осиной талией» (см. также рисунки 17 и 24 ниже). Замкнутая кривая, порождённая функцией hmean, имеет также форму некой лемнискаты, которую можно назвать лемнискатой Кэли (Arthur Cayley (1821-1895): английский математик) заслуживающей такого собственного имени и дальнейшего исследования: каков порядок этой кривой, какое ее уравнение, как её можно построить параметрически и т.д. и т.п. – все то, что обычно сопровождает описание эллипса, овала Кассини и других кривых, уже исследованных математиками-теоретиками (см. конец статьи). Если же значение переменной L увеличивать до бесконечности, то все три наших овала сольются в один «идеальный овал» – в окружность.

С овалом, построенным по функции hmean (среднее гармоническое) вышла такая история. Его автор со своими студентами «открыл» в результате математических экспериментов на компьютере в программу на рис 1 была вставлена буква h – hmean вместо mean. Об этом экспериментальном «открытии» было сообщено пятерым математикам с просьбой дать теоретическую оценку этой работе. Все математики не заметили, что гармонический овал уже давно открыт. Вопрос после этого (контрольный выстрел) был размещен на форуме. Получен ответ, в том плане, что это уже известный овал, описанный на сайте математических кривых и поверхностей https://mathcurve.com/courbes2d/cayleyovale/cayleyovale.shtml.

2. Среднее степенное

Среднее арифметическое mean, среднее геометрическое gmean и среднее гармоническое hmean – это частные случаи *среднего степенного*[6]. Функция с тремя аргументами,

[6] А среднее степенное в свою очередь является частным случаем *среднего Колмогорова* (https://ru.wikipedia.org/wiki/Среднее_Колмогорова). Тут открываются перспективы для новых математических

возвращающая это значение для двух величин a и b, показана на рис. 7. Если *степень среднего* d равна единице, то это *среднее арифметическое*, если d равно нулю – это *среднее геометрическое*, а если d равно минус единице – это *среднее гармоническое*. Но тут возможны другие и даже нецелые степени, чем мы и воспользуемся.

$$\mathrm{Mean}(a, b, d) := \mathrm{if}\left[d = 0, \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}, \left(\frac{a^d + b^d}{2}\right)^{\frac{1}{d}}\right]$$

Рис. 7 Среднее степенное для двух величин

На рисунках 8-13 показаны *овалы разной степени овальности* при S = 4 cm, L = 3 cm и при разных значениях d – замкнутые кривые, построенные с опорой на функцию, показанную на рис. 7. На сайте статьи [3] эти и другие кривые можно видеть в анимации. Там же можно скачать соответствующие Mathcad-файлы.

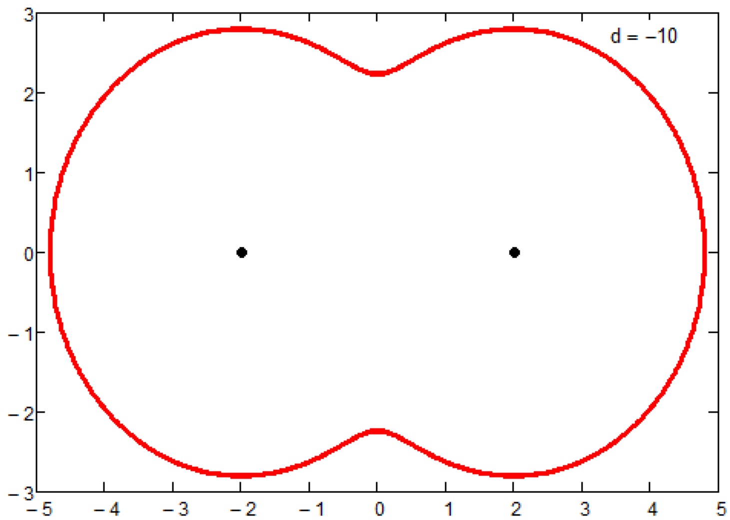


Рис. 8 Овал степени -10

экспериментов с авторскими овалами – см. ниже! Альтернативное первое название статьи – овалы Колмогорова. Но, не будем упоминать имя математика-теоретика всуе!

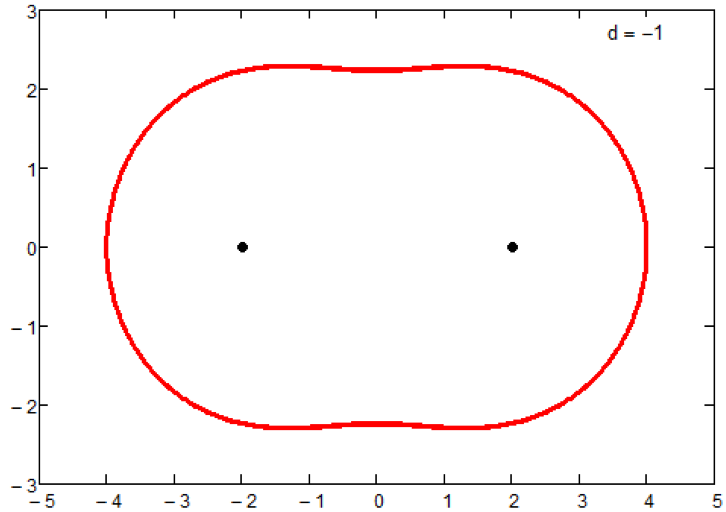


Рис. 9 Овал степени -1 (гармонический овал Кэли – см. рисунки 2-6)

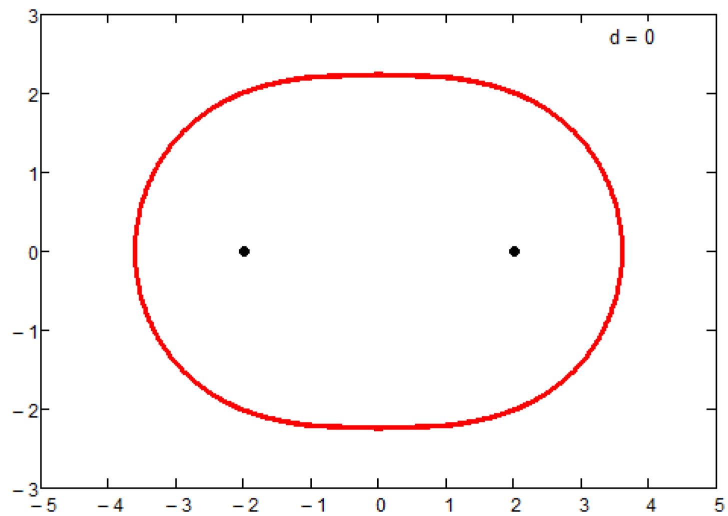


Рис. 10 Овал нулевой степени – овал Кассини

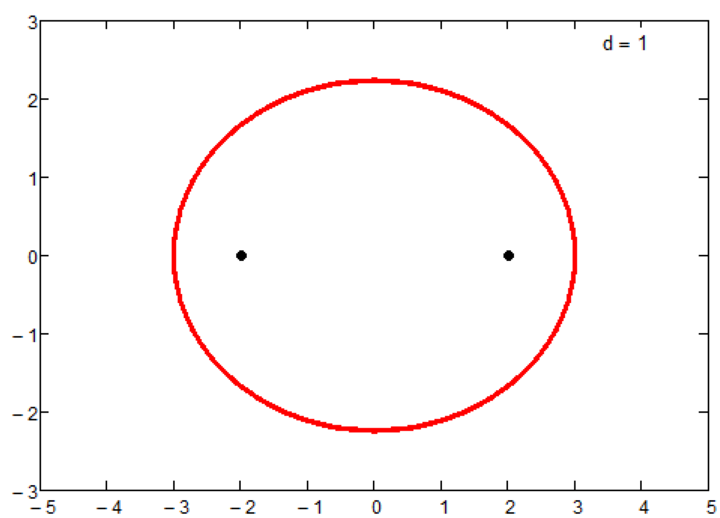


Рис. 11 Овал первой степени – эллипс

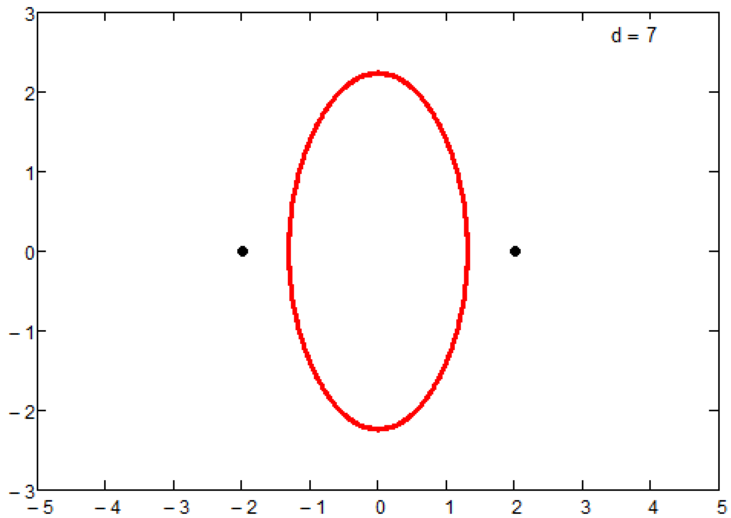


Рис. 12 Овал степени 7

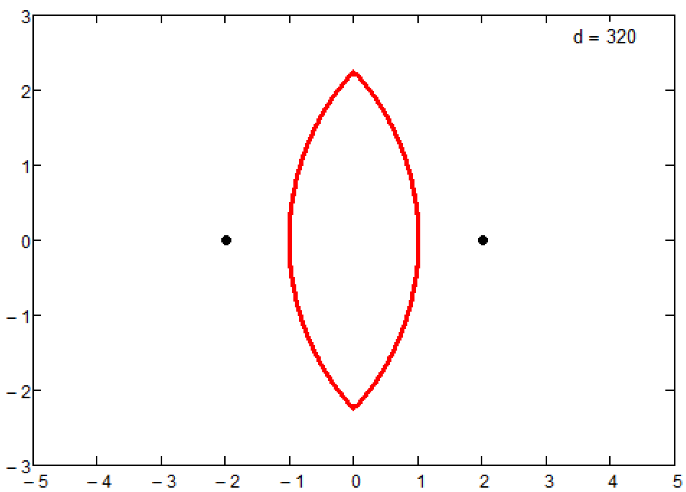


Рис. 13 Овал степени 320

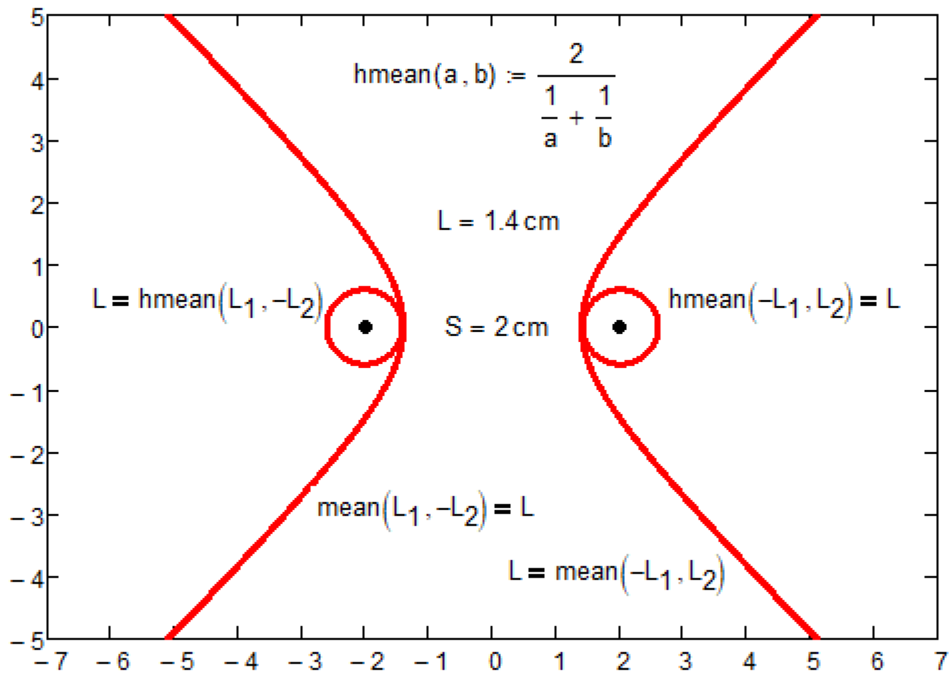
Замкнутые кривые, показанные на рис. 8-13, примечательны ещё и тем, что при определенных условиях их фокусы могут оказаться на самих кривых.

3. Круглая гипербола

Изменения, как отмечено выше, можно внести и в определение *гиперболы*, как геометрического места точек на плоскости.

На рис. 14 показано построение замкнутых кривых по формулам mean(-L_1, L_2) и hmean(-L_1, L_2) (mean(L_1, -L_2) и hmean(L_1, -L_2)). Первая кривая – это классическая гипербола (две её ветви). А вот использование функции hmean (функция gmean тут по понятным причинам неприменима) вместо функции mean с изменённым знаком одного аргумента привел к тому, что две ветви гипербола свернулись в два овала, близкие по форме к окружностям. А что это за замкнутые кривые – это работа для математиков-теоретиков. Тут сразу вспоминаются две окружности Аполлония – геометрическое место точек на плоскости, отношение расстояний от которых до двух заданных точек — величина постоянная, не равная единице.

Примечание. При построении овалов на рис. 14 использовалась не встроенная в Mathcad функция hmean, а одноименная пользовательская функция, допускающая и отрицательные аргументы – функция Mean (рис. 7) при d = -1.



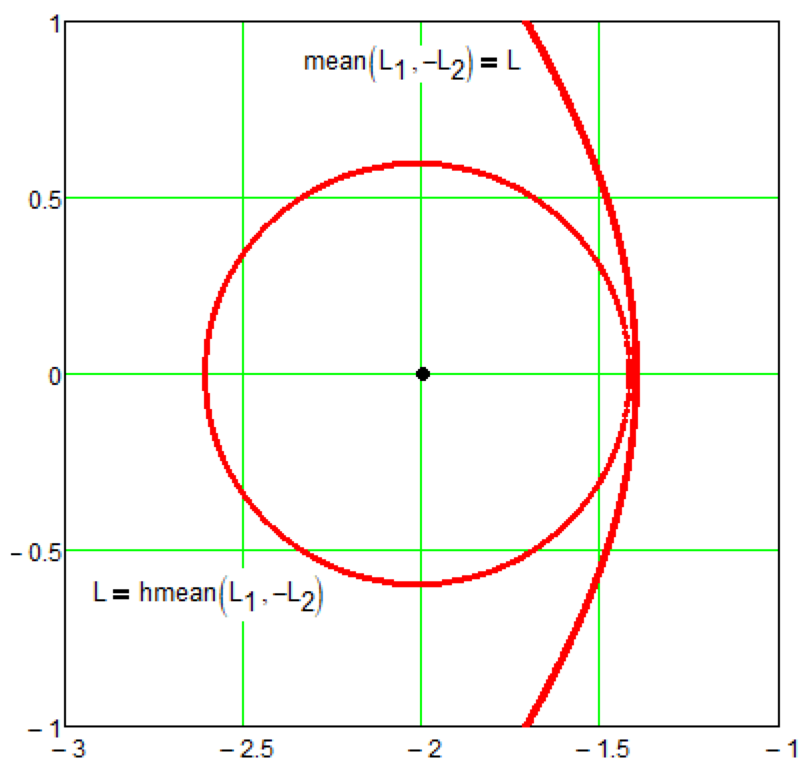


Рис. 14 Гипербола и «гармоническая гипербола» (внизу увеличение части верхнего рисунка)

4. Овалы Колмогорова и овалы Чирнхауса

На рисунке 15 приведены два примера овалов Колмогорова, если так их можно назвать, – замкнутой кривой, опирающуюся не на среднее степенное, а на среднее Колмогорова, где в качестве монотонных функций (прямой и обратной) использованы экспонента и натуральный логарифм[7] (рис. 15) и тангенс и котангенс (рис. 16).

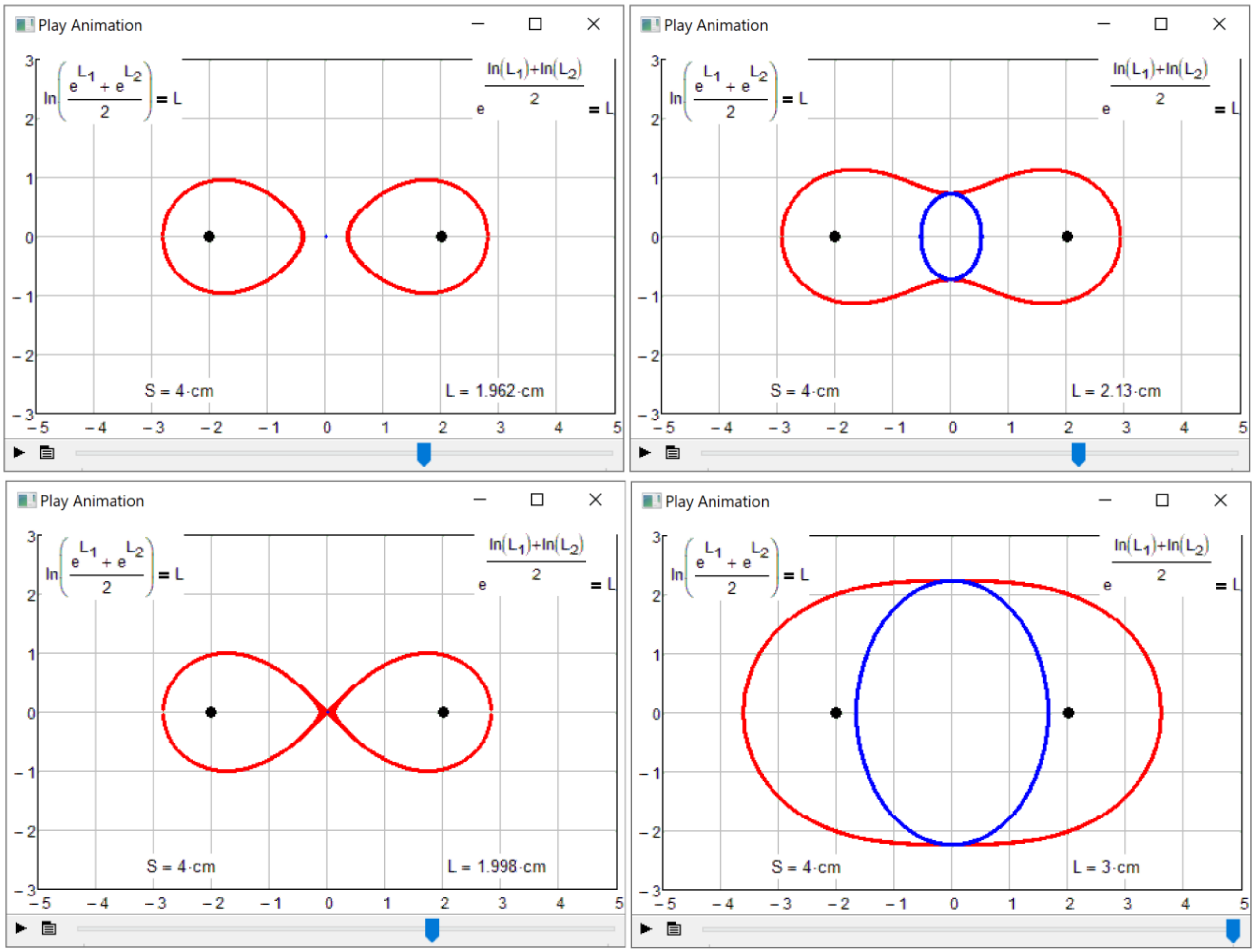


Рис. 15 Один из овалов Колмогорова – экспоненциальный овал с лемнискатой и логарифмический овал

Овалы, показанные на рис. 15, можно назвать *экспоненциальным* и *логарифмическим*. Правда, не ясно кто какой. Будем считать экспоненциальным тот, который свертывается в лемнискату – в *экспоненциальную лемнискату*.

---

[7] Эту кривую можно также назвать *экспоненциальным эллипсом* – одним из овалов Колмогорова.

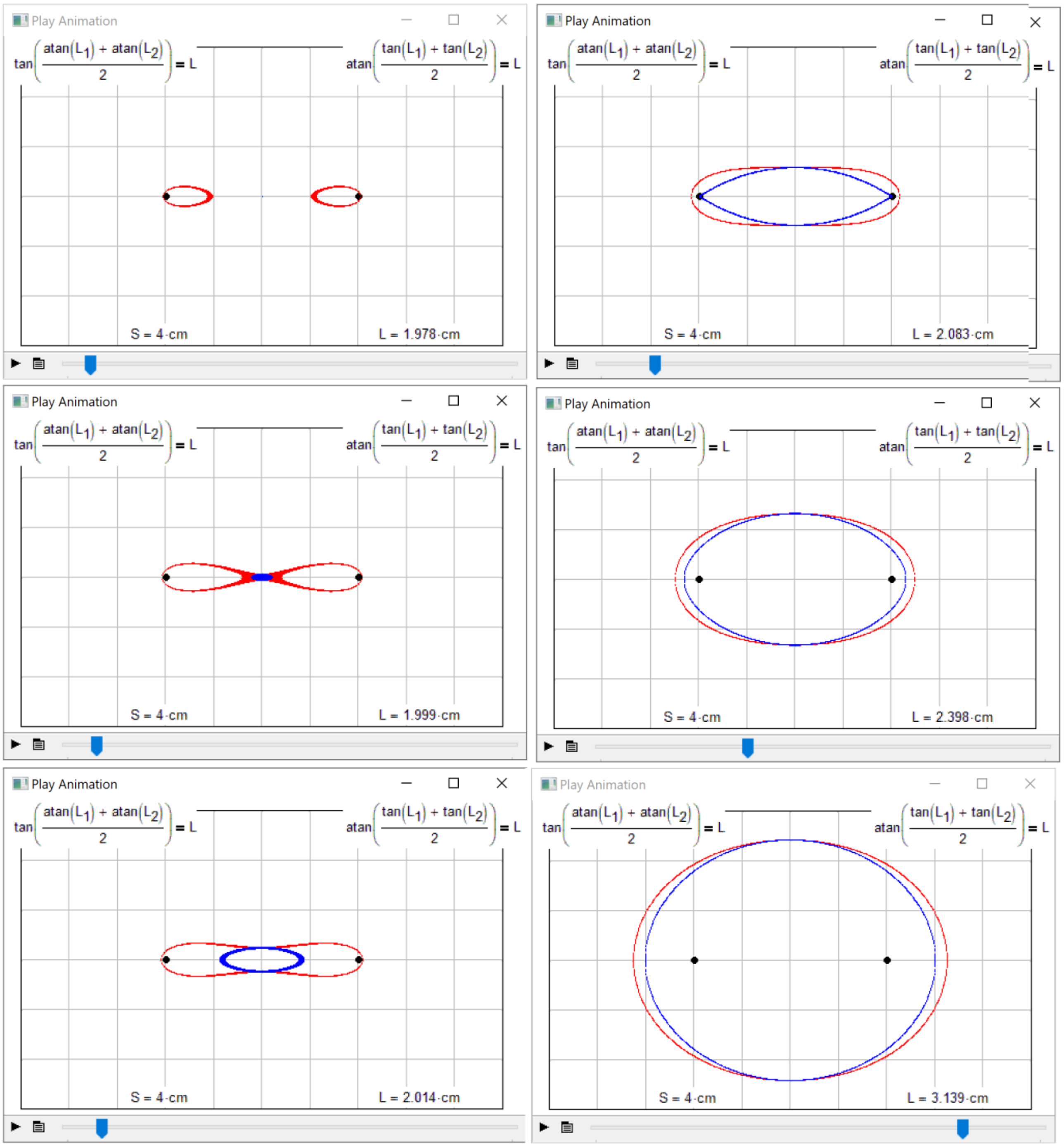


Рис. 16 Один из овалов Колмогорова – тангенциальный овал с лемнискатой и арктангенциальный овал

Экспоненту и натуральный логарифм, а также тангенс и котангенс можно вставить и в среднее степенное с разными значением d, а не только для d=1. Получится ряд новых овалов и лемнискат Колмогорова, которые можно увидеть в анимации на сайте стати.

Степенные овалы и овалы Колмогорова можно изобразить парами – см. рис. 15 и 16 выше и рис. 17 ниже. Только у овала Кассини нет пары.

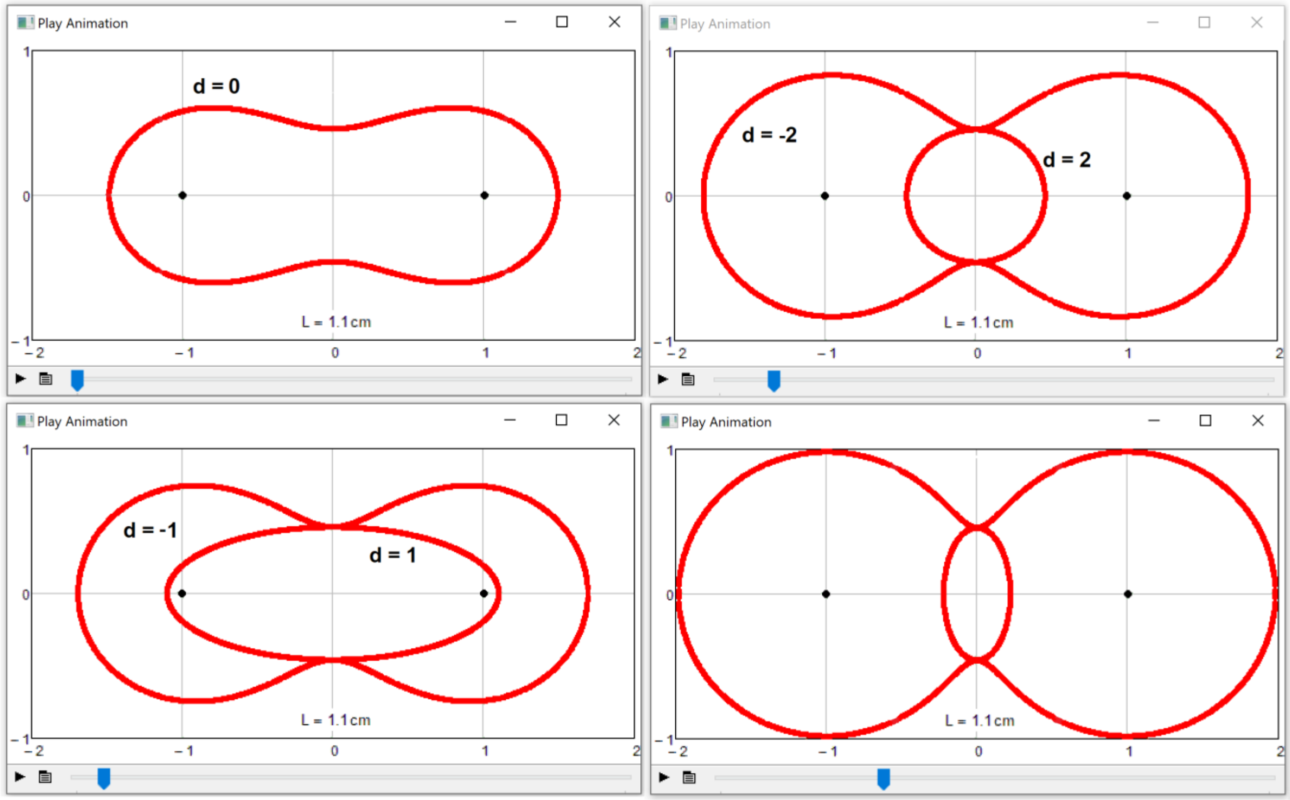


Рис. 17 Пары степенных овалов

5. Многофокусность

Предложенный метод построения графиков годится и для кривых с тремя и более фокусами – см. рис. 18 с шестью кадрами анимации [3] трехфокусного эллипса (эллипс Чирнхауса [4]), овала Кассини и овала Кэли. Эллипс при уменьшении значения L сначала превращается в точку, а потом совсем пропадает. Два других овала не исчезают до конца – они приближаются к точке, обрамляя собой фокусы.

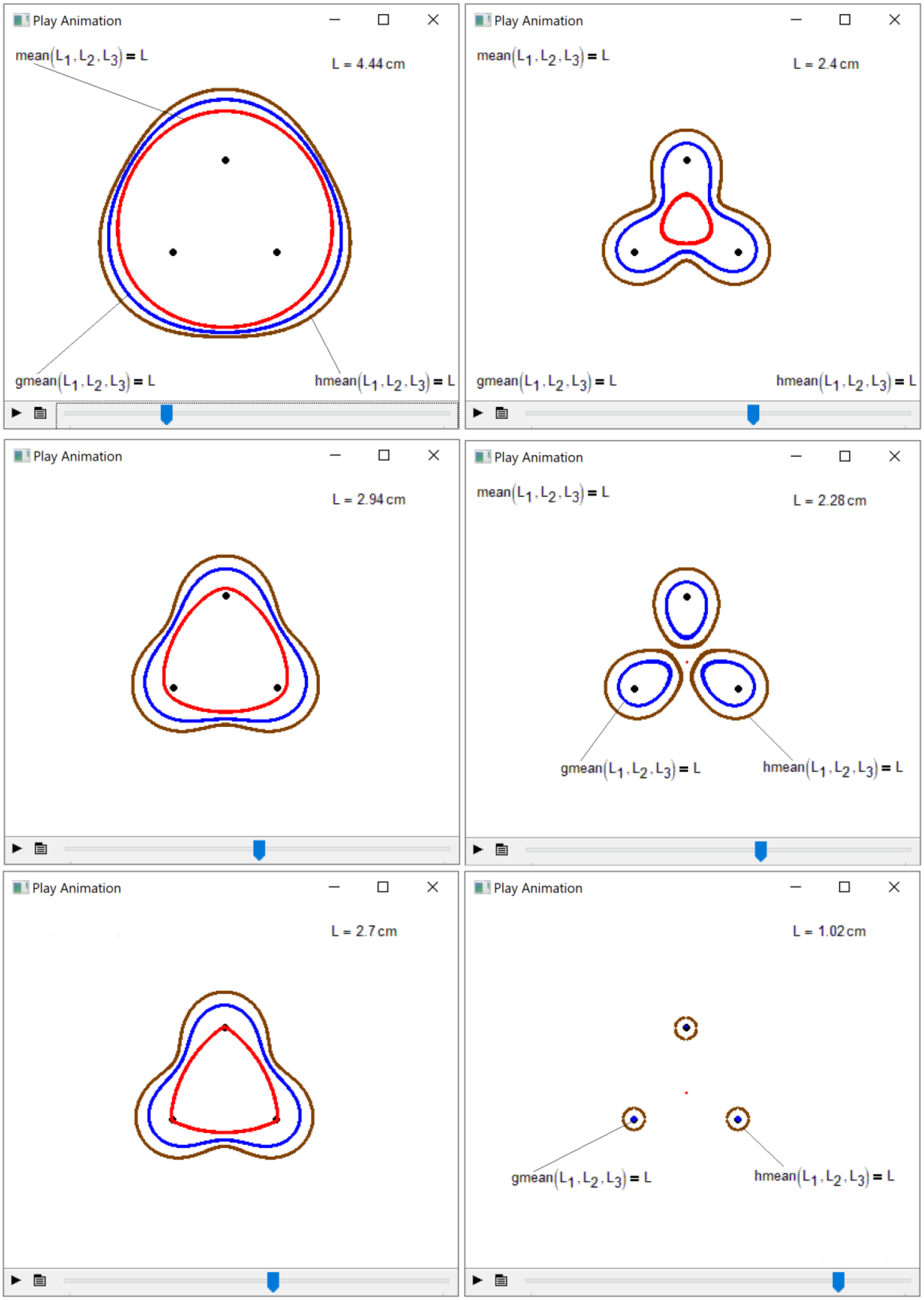


Рис. 18 Трехфокусные: эллипс Чирнхауса, овалы Кассини и новый «гармонический» овал

Интересно исследовать моменты, когда «талии» у этих двух овалов начинают рваться. Трехфокусный овал Кассини в какой-то момент превращается в трехлепестковую лемнискату

Бернулли («трехлепестковая роза»), а затем разрывается на три отдельных овала. Затем такая участь ожидает и «гармонический овал» – см. рис. 19.

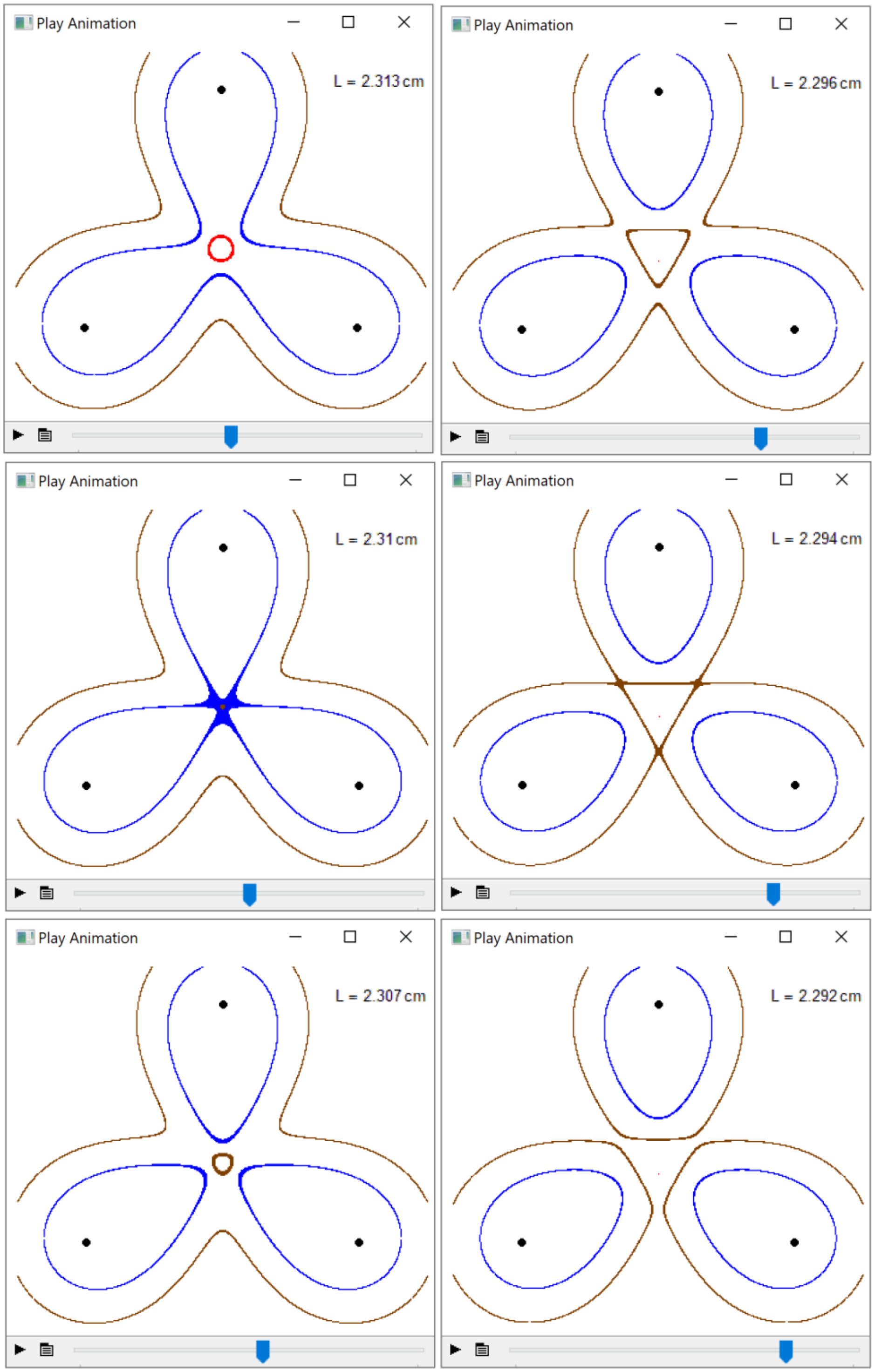


Рис. 19 Трехлепестковая лемниската Бернулли в обрамлении трехфокусного «гармонического» овала

6. Многоразмерность

Описанные в статье плоские объекты можно распространить и на n-мерное пространство.

На рисунке 20 показан трехмерный *гармонический овалоид*[8] или *овалоид Кэли*, если так можно выразиться, – поверхность, образуемая вращением гармонической лемнискаты (рис. 3) вокруг оси OX. Эта поверхность может иметь такое определение – геометрическое место точек в трехмерном пространстве, среднее гармоническое которого… читатель, перейди в начало статьи и повтори все рассчитанное и нарисованное, но не для плоскости, а для трех- и более мерного пространства!

> $restart$

> $xf := 2$

> $$HL := \sqrt{(x-xf)^2+y^2+z^2} + \sqrt{(x+xf)^2+y^2+z^2} = \sqrt{(x-xf)^2+y^2+z^2} \cdot \sqrt{(x+xf)^2+y^2+z^2}$$

> $with(plots):$

> $implicitplot3d(HL, x=-4..4, y=-4..4, z=-4..4, numpoints=1000000)$

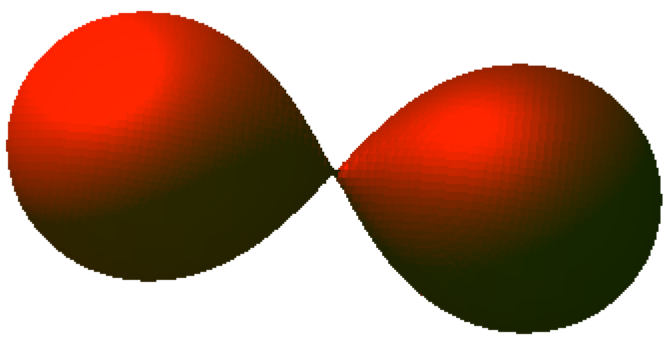


Fig. 20 Гармонический овалоид Кэли

Рисунок 20 наводит на мысль о таком физико-математическом эксперименте.

Берем сдутый резиновый шарик, перевязываем его в середине и начинаем его надувать – менять значение показателя степенного среднего от единицы (d = 1: вырожденный эллипсоид – отрезок прямой, соединяющей фокусы) до минус бесконечности. Шарик сначала надуется до лемнискаты Бернулли (d = 0), потом до гармонической лемнискаты Кэли (d = -1) и, наконец превратиться в две сферы.

7. Еще раз об овале Кэли

Можно дать и такое несколько спорное определение гармонического овала Кэли, базирующееся только на координатах фокусов.

Гармонический овал Кэли – это геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух фокусов (эллипс) численно равна произведению расстояний от этих фокусов (овал Кассини).

Если игнорировать тот факт, что длину и площадь сравнивать нельзя, и воспринимать данное определение как постановку задачи о решении одного уравнения с двумя неизвестными, то множеством таких решений и будет воображаемый гармонический овал. На рисунках 21-23

[8] Изображение получено с помощью математической программы Maple.

(они созданы с помощью сайта WolframAlpha.com[9]) можно видеть его в трех видах – два отдельных овала (расстояние между фокусами равно шести – рис. 21), лемниската (расстояние равно четырем – рис. 22) и один овал (расстояние равно двум – рис. 23).

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(x+3)^2+y^2}=\sqrt{(x-3)^2+y^2}\,\sqrt{(x+3)^2+y^2}$$

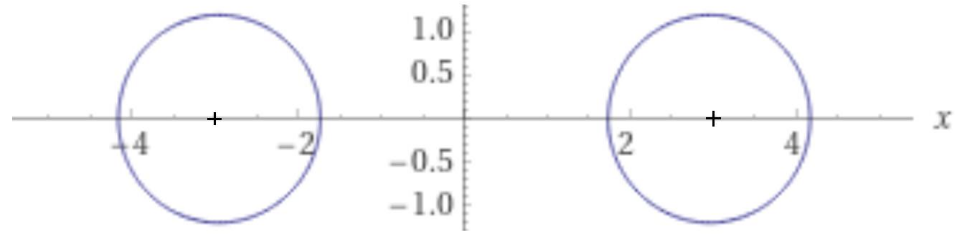


Fig. 21 Гармонический овал как множество решений уравнения [plot sqr((x-3)^2+y^2)+sqr((x+3)^2+y^2)=sqr((x-3)^2+y^2)*sqr((x+3)^2+y^2) - Wolfram|Alpha]

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}\,\sqrt{(x+2)^2+y^2}$$

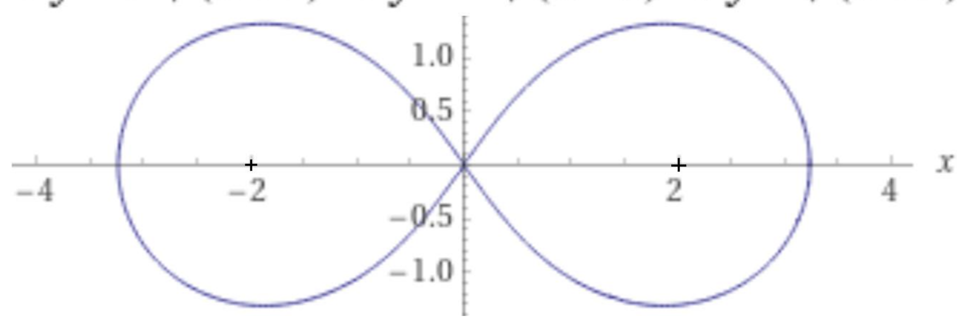


Fig. 22 Гармоническая лемниската [plot sqr((x-2)^2+y^2)+sqr((x+2)^2+y^2)=sqr((x-2)^2+y^2)*sqr((x+2)^2+y^2) - Wolfram|Alpha]

9 На этот сайт с конкретными расчетами можно перейти по указанным в названии рисунка ссылкам. Для этого нужно щелкнуть по ссылке либо узнать полный адрес расчета через правую кнопку мыши и перейти к нему в среде какого-либо браузера Интернета. Этот вычислительный сайт является сетевой версией широко известной математической программой Mathematica. Он условно-бесплатный – более-менее простые примеры решаются бесплатно, а сложные требуют платной подписки. Сайт, кстати, не только считает, преобразует и строит графики, но и дает дополнительную полезную информацию о решаемой задаче.

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}\,\sqrt{(x+1)^2+y^2}$$

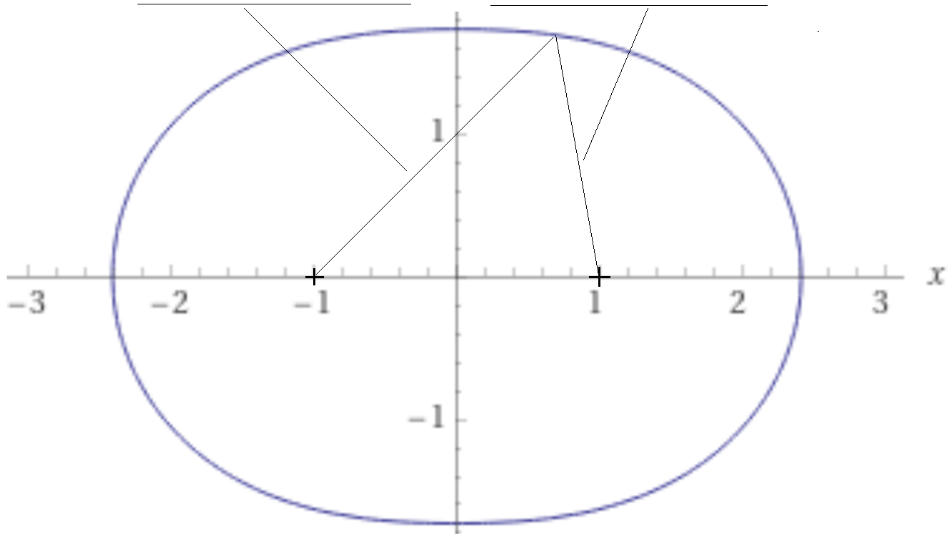


Fig. 23 Гармонический овал [plot sqr((x-1)^2+y^2)+sqr((x+1)^2+y^2)=sqr((x-1)^2+y^2)*sqr((x+1)^2+y^2) - Wolfram|Alpha]

Дальнейшее уменьшение расстояния между фокусами приводит к тому, что все овалы в конце концов превращаются (вырождаются) в окружность.

Овалов и лемнискат, подобных тем, какие описаны в данной статье, можно напридумывать огромное множество. Одним из них даны имена. Другие ждут имен. Тут можно вспомнить об астероидах, которых тоже «огромное множество» – именных и безымянных. Астероидам присваивают имена известных на Земле персон. А что, если давать имена математиков безымянным пока овалам и лемнискатам!?

Вывод

Использование понятие обобщенное среднее (среднее Колмогорова [5]), позволяет создать новые замкнутые кривые [6] – обобщенные овалы, овалы Колмогорова. Такое и другое подобное творчество хорошо вписывается в новую образовательную технологию STEM [7].

Литература:

1. Очков В.Ф., Фальконы А.Д. Семь вычислительных кривых или Велосипед Аполлония // Cloud of Science. 2016. Т. 3. № 3. С. 397-418 URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/7-curves.pdf
2. Очков В.Ф. Физические и экономические величины в Mathcad и Maple (Серия «Диалог с компьютером»). М.: Финансы и статистика, 2002
3. https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/Tree-ovals-mean-gmean-amp-hmean/m-p/701894

4. Очков В. Ф., Нори М. Новый эллипс или Математический фарфоровый сервиз // Cloud of Science. Том 5. № 3. 2018. С. 240-267 URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Tschirnhaus.pdf
5. Колмогоров А. Н. Математика и механика // Избранные труды / отв. ред. С. М. Никольский, сост. В. М. Тихомиров. — М.: Наука, 1985. — Т. 1. — С. 136-138.
6. А. А. Савелов. Кривые Персея // Плоские кривые: систематика, свойства, применение / под ред. А. П. Нордена. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960.
7. Ochkov V. 2^5 Problems for STEM Education. Chapman and Hall/CRC. 2020. 396 Pages 488 B/W Illustrations URL: https://www.routledge.com/2-Problems-for-STEM-Education/Ochkov/p/book/9780367345259

Автор выражает глубокую признательность своему школьному товарищу, д. ф.-м. н. Александру Лукацкому за помощь в написании статьи.