DOI: 10.7868/S0233361924120036

КОМЕТА 1812 года – ГДЕ ТЫ?

Доктор технических наук, профессор,
заслуженный энергетик Российской Федерации **В.Ф. ОЧКОВ,**
Кандидат технических наук, доцент **Ю.В. ШАЦКИХ**
(НИУ "МЭИ")

В статье рассказано о том, как можно определить современное местонахождение кометы 1812 года через решение на компьютере дифференциального уравнения.

Начнём с двух цитат и одного рисунка.

Второй том романа Л.Н. Толстого "Война и мир" заканчивается так: "*При въезде на Арбатскую площадь огромное пространство звёздного тёмного неба открылось глазам Пьера. Почти в середине этого неба над Пречистенским бульваром, окружённая, обсыпанная со всех сторон звездами, но отличаясь от всех близостью к земле, белым светом и длинным, поднятым кверху хвостом, стояла огромная яркая комета 1812 года, та самая комета, которая предвещала, как говорили, всякие ужасы и конец света. Но в Пьере светлая звезда эта с длинным лучистым хвостом не возбуждала никакого страшного чувства. Напротив, Пьер радостно, мокрыми от слёз глазами смотрел на*

C/1811 F1 (Большая комета)

Большая комета 1811 года на рассвете утром 15 октября в небе близ Уинчестера, Англия. Гравюра Г. Р. Кука.

Открытие	
Первооткрыватель	Оноре Фложерг
Дата открытия	25 марта 1811
Характеристики орбиты	
Эксцентриситет	0,995125
Большая полуось (a)	212 а. е.
Перигелий (q)	1,035412 а. е.
Афелий (Q)	424 а. е.
Период обращения (P)	3100 а
Наклонение орбиты	106,9342°
Последний перигелий	12 сентября 1811

Рис. 1. Информация в Википедии о комете 1812 года (а.е. – астрономическая единица, расстояние от Земли до Солнца)

эту светлую звезду, которая как будто, с невыразимой быстротой пролетев неизмеримые пространства по параболической линии, вдруг, как вонзившаяся стрела в землю, влепилась тут в одно избранное ею место на чёрном небе и остановилась, энергично подняв кверху хвост, светясь и играя своим белым светом между бесчисленными другими мерцающими звездами".

А у М.А. Булгакова в романе "Белая гвардия" поручик Мышлаевский восклицает так: «*"Война и мир" читал… Вот, действительно, книга. До самого конца прочитал – и с удовольствием. А почему? Потому что писал не обормот какой-нибудь, а артиллерийский офицер».*

А вот, что можно найти в Википедии про комету двенадцатого года – рис. 1.

Из вышеприведённой информации можно сделать следующий вывод.

Толстой, как артиллерийский офицер должен был знать, что снаряд, выпущенный из пушки, летит по параболе[1]. Если, конечно, допустить, что Земля плоская, нет сопротивления воздуха, а снаряд – это материальная точка, имеющая массу, но не имеющая размеров. Этим можно объяснить, почему в первой цитате и упоминается именно парабола, а не какая-то другая кривая второго порядка[2]. Но из текста на рис. 1 видно, что комета 1812 года летела по эллиптической, а не по "параболической линии". На это указывают слова "эксцентриситет[3]" и "большая полуось". Расшифруем их.

Если спросить людей, хоть немного знакомых с математикой, что такое парабола, то подавляющее большинство ответит так… Чита-

---

[1] Очков В.Ф., Очкова Н.А. Лев Толстой и математика. Москва: МПГУ, 2023 (http://www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/Tolstoy-Math-3.pdf).

[2] Тут, конечно, к "физике" подмешена и "лирика". Слово "параболический" само по себе завораживает. Вспомним строки Вознесенского "Несутся искусство, любовь и история / По параболической траектории!"

[3] Подруге Эллочки Людоедки "было известно одно такое слово, которое Эллочке не могло даже присниться. Это было богатое слово: "эксцентриситет". Так в наше время можно было бы отредактировать роман Ильфа и Петрова "12 стульев".

тель, проверь себя – ответь на этот вопрос, а потом читай статью дальше! Да-да, “подавляющее большинство” здесь сразу вспомнит ещё один широко известный объект школьной математики – квадратное уравнение, забыв о геометрическом месте точек. Об этих точках мы сразу вспоминаем, когда речь заходит, например, об окружности. Так вот, парабола – это геометрическое место точек на плоскости, для которых расстояние до заданной точки (фокуса) равно расстоянию до заданной прямой, называемой директрисой. Если же расстояние от точки до фокуса будет меньше расстояния от точки до директрисы, то парабола “свернётся” в эллипс, а если больше – то “развернётся” в две ветви гиперболы. Мера неравенства этих двух расстояний и называется эксцентриситетом (ε), который у параболы равен единице. Эллипс по-древнегречески (ἔλλειψις) – “недостаток, выпадение, опущение“ – недостаток этого самого эксцентриситет ($\varepsilon < 1$). У гиперболы же его избыток – $\varepsilon > 1$.

Кстати, о прямой линии на плоскости и о “подавляющем большинстве людей, знающих математику”. Если их спросить об уравнении прямой линии на плоскости, то ответ, скорее всего, будет таков: $y = A + B \cdot x$. Мы же будем оперировать менее известной формулой с тремя коэффициентами, охватывающей и случай, когда прямая – параллельна оси ординат.

Давайте за пару минут *скачаем* с сайта www.smath.com и *установим* на своём компьютере отечественную, свободно распространяемую математическую программу SMath, в среде которой *решим* геометрическую задачу с параболой, эллипсом и гиперболой – см. рис. 2. Девизом этой программы могут быть эти выделенные слова “Скачал, установил, решил!”

На рис. 2 показано, как в расчёт вводятся координаты фокуса x_F и y_F, неявная функция директрисы *Dir* и неявная функция плоских кривых второго порядка *f*, опирающаяся на расстояние от точки до фокуса (числитель дроби) и на расстояние от точки до директрисы (знаменатель дроби). Эта дробь может быть либо равна единице (тогда получится парабола), либо меньше единицы (эллипс), либо больше единицы (гипербола). Все это отображено на графиках рис. 2, где директриса нарисована пунктиром. Можно “поиграть” значениями констант x_F, y_F, *A*, *B*, *C* и/или ε и посмотреть, что будет получаться на графике.

С директрисой мы разобрались, а что такое “большая полуось”?

Дело в том, что эллипс можно задать и по-другому – не через фокус и директрису (рис. 2), а через два фокуса и… “верёвочку” (рис. 3).

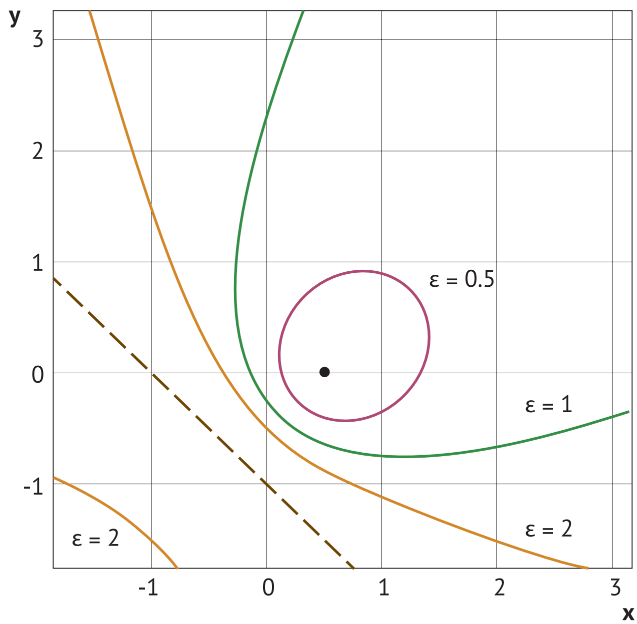
Первому автору вспоминаются школьные годы, когда запустили первый спутник Земли, а Юрий Гагарин полетел в космос. Учитель математики в связи с этими эпохальными событиями рассказал, по какой орбите могут вращаться спутники планет – естественные и искусственные – и как можно нарисовать эллипс (см. рис. 3). Первый автор

Рис. 2. Рисование параболы, эллипса и гиперболы

$x_F := 0.5 \qquad y_F := 0$

$A := 1 \qquad B := 1 \qquad C := 1 \qquad Dir(x, y) := A \cdot x + B \cdot y + C$

$$f(x, y, \varepsilon) := \frac{\sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2}}{\frac{|Dir(x, y)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}} - \varepsilon$$



$\begin{cases} [\, x_F \;\; y_F \;\; "." \;\; 3 \;\; "blue" \,] \text{ фокус} \\ Dir\,(x, y) \text{ прямая (директриса)} \\ f\,(x, y, 1) \text{ парабола} \\ f\,(x, y, 0.5) \text{ эллипс} \\ f\,(x, y, 2) \text{ гипербола} \end{cases}$

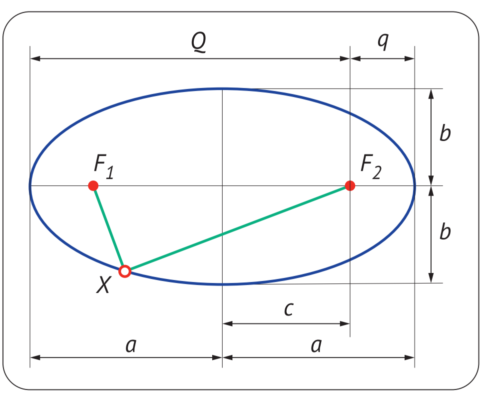
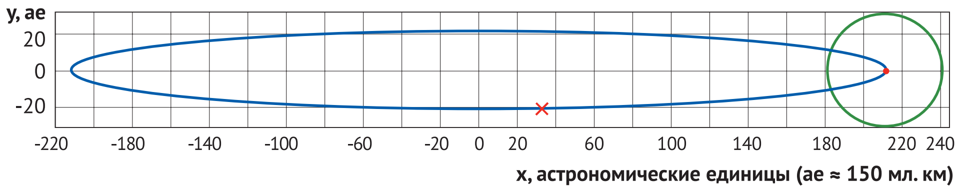


Рис. 3. Эллипс с двумя фокусами

$au := 150 \cdot 10^6\ km \quad a := 212\ au \quad \varepsilon := 0.995125 \quad b := a \cdot \sqrt{1-\varepsilon^2} = 20.91\ au \quad c := a \cdot \varepsilon = 211.0\ au$



$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{x^2}{\left(\dfrac{a}{au}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{b}{au}\right)^2} - 1 & \text{Каноническое уравнение элипса} \\ \left[\dfrac{c}{au}\ \ 0\ \ "."\ \ 2\ \ "red"\right] & \text{Солнце} \\ \left(x - \dfrac{c}{au}\right)^2 + y^2 - 30.1^2 & \text{Условная граница Солнечной системы} \\ \left[32.65\ \ -20.62\ \ "x"\ \ 10\ \ "red"\right] & \text{Положение кометы 1812 года в 2024 году} \end{array}\right.$$

Рис. 4. Орбита кометы 1812 года

после урока пришёл домой, вбил в стену комнаты два гвоздя, привязал к ним верёвочку, натянул её карандашом и нарисовал нижнюю половинку эллипса, двигая точку X. Подзатыльник матери прервал это увлекательное занятие. Да, эллипс – это геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух фокусов[4] есть величина постоянная (см. рис. 3). Две зелёные прямые линии – это та самая "верёвочка", которую тянул карандаш к точке X.

Через два фокуса эллипса проводится большая, а через её середину перпендикулярно ей – малая ось. Их половинки обозначаются как *a* и *b*. Если два фокуса поместить в одной точке, то мы получим окружность, у которой – *a* равно *b*. В данном случае эти две константы будут переименованы в *r* – в радиус окружности. У эллипса, можно сказать, есть два радиуса (диаметра) – большой и маленький.

Если в двухфокусном определении эллипса сумму заменить разностью, то мы получим гиперболу. Вернее, две ветви гиперболы, если от разности брать абсолютное значение. Если же поработать с двумя другими основными арифметическими действиями – с умножением и делением, – то мы получим овал Кассини и окружности Аполлония[5].

Кстати, парабола, эллипс (эллипсис) и гипербола присутствуют и в литературе.

[4] Фокусов может быть больше двух – см. Очков В.Ф., Нори М. Новый эллипс или Математический фарфоровый сервиз // Cloud of Science. Том 5. № 3. 2018. С. 240–267 (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Tschirnhaus.pdf)

[5] Очков В.Ф., Фалькони А.Д. Семь вычислительных кривых или Велосипед Аполлония // Cloud of Science. 2016. Т. 3. № 3 (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/7-curves.pdf)

Парабола – это небольшой рассказ иносказательного характера, имеющий поучительный смысл и особую форму повествования, которая движется как бы по кривой (параболе): начатый с отвлечённых предметов, рассказ постепенно приближается к главной теме, а затем вновь возвращается к началу.

Эллипсис – это пропуск в тексте (недостаток текста, умолчание) элемента предложения, который восстанавливается посредством контекста.

Про гиперболу и толковать нечего – достаточно вспомнить гоголевские "шаровары шириною с Чёрное море".

Но вернёмся от лирики к физике – к астрофизике…

На рис. 4 можно видеть построенную в среде SMath эллиптическую орбиту кометы 1812 года. Предварительно в расчёт были введены нужные данные: астрономическая единица длины *au*, длина большой полуоси эллипса *a* и эксцентриситет ε. Затем были рассчитаны значения малой полуоси *b* и фокального расстояния *c*, фиксирующего место, где в одном из фокусов эллипса находится Солнце (красная точка). Нужные формулы легко найти в интернете. Использовано также каноническое уравнение эллипса[6], записанное первым аргументом графика, и каноническое уравнение окружности (третий аргумент).

Орбиту кометы на рис. 4 можно сравнить с условной границей Солнечной системы – с окружностью радиусом 30.1 астрономических единиц (расстояние от Солнца до Нептуна). Сама же астрономическая единица длины – это расстояние от Солнца до Земли (примерно 150 млн км – см. рис. 6).

Крестик на рис. 4 – это место, где находится комета 1812 года в 2024 году. Можно по-разному рассчитать координаты этой точки. Один из самых простых способов (как это не покажется парадоксальным) – решение системы дифференциальных уравнений движения одного небесного тела (кометы) относительно другого (Солнца), в которые заложен второй закон Ньютона (левая часть уравнений) и закон всемирного тяготения (правая часть – см. рис. 5).

Гравитационная постоянная G_N встроена в среду SMath. Она для контроля в начале расчёта на рис. 5 выведена "на печать". Далее задаётся масса Солнца m_s. Её можно взять не только из интернета, но и из… кинофильма "Весна", где одна из героинь (её играет Любовь Орлова), притворяющаяся научным работником, изучающим Солнце, ходит по комнате и бормочет "*Масса солнца составляет два октиллиона тонн…*". В нашем довольно приближённом расчёте число 1.9885 спокойно можно округлить до двойки. Массу кометы *m* можно задать любую, отличную от нуля, так как она в расчётах не участвует, а только делает зримыми законы физики, записанные в уравнениях. Левая часть

[6] *Очков В.Ф. Армагедон или Математическая китайская грамота // Энергия: экономика, техника, экология. № 1. 2023 (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Armagedon-EEE.pdf)*

Рис. 5. Расчёт орбиты кометы 1812 года

$$G_N := 6.6743 \cdot 10^{11}\, N \frac{m^2}{kg^2} \qquad m_S := 1.9885 \cdot 10^{28}\ \text{tonne}$$

$$t_{end} := 3100\ yr \qquad v := 104\ \frac{m}{s} \qquad N := 3100 \cdot 12$$

$$\left[\begin{array}{l} x(0\,s) = -a \qquad x'(0\,s) = 0\,\frac{m}{s} \\ m \times x''(t) = G_N \cdot \dfrac{m \cdot m_s}{\sqrt{(c - x(t))^2 + (y(t))^2}^{\,2}} \cdot \dfrac{c - x(t)}{\sqrt{(c - x(t))^2 + (y(t))^2}^{\,2}} \\ y(0\,s) = 0\,m \qquad y'(0\,s) = v \\ m \times x''(t) = G_N \cdot \dfrac{m \cdot m_s}{\sqrt{(c - x(t))^2 + (y(t))^2}^{\,2}} \cdot \dfrac{-y(t)}{\sqrt{(c - x(t))^2 + (y(t))^2}^{\,2}} \end{array}\right.$$

$$\text{Rkadapt}\left(\left\{\begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \end{array}\right., t_{end}, \Big|_{N} \left[kg := 1 \quad m := 1 \quad s := 1 \right]\right)$$

$$x\left(\left(\frac{3100}{2} + (2024 - 1812)\right) yr\right) m = 33.15\ au$$

$$y\left(\left(\frac{3100}{2} + (2024 - 1812)\right) yr\right) m = -20.45\ au$$

уравнений – это произведение массы кометы на её ускорение, а правая – произведение массы Солнца на массу кометы, делённое на квадрат расстояния между этими небесными телами. В расчёте фигурируют не сами силы и ускорения, а их проекции по оси абсцисс и по оси ординат (принцип суперпозиций). Третий сомножитель в правых частях уравнений служит для расчёта этих проекций сил тяготения двух небесных тел. Для кометы эта сила определяет её эллиптическое движение, а для Солнца – это "комариный укус".

Скорость кометы *v* в афелии – в начальной расчётной точке ($t = 0$), равная 104 метрам в секунду, определялась так. Задавалось какое-то значение *v* и определялось значение перигелия *q*. Если *q* оказывалось больше значения, указанного на рис. 1, то значение скорости уменьшалось, и наоборот. У нас задача с краевыми условиями (известно положение кометы в двух крайних точках в афелии и перигелии), но мы свели её к задаче Коши – к задаче с начальными условиями, применив метод стрельбы: перелёт, недолёт, перелёт, недолёт… попадание. Этот универсальный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений здесь уместен и потому, что у нас упоминаются два артиллерийских поручика – Толстой и Мышлаевский.

Система двух дифференциальных уравнений второго порядка

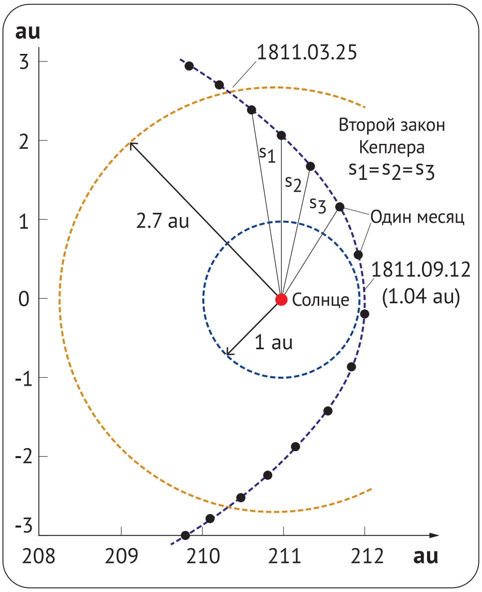


Рис. 6. Комета 1812 года
около перигелия

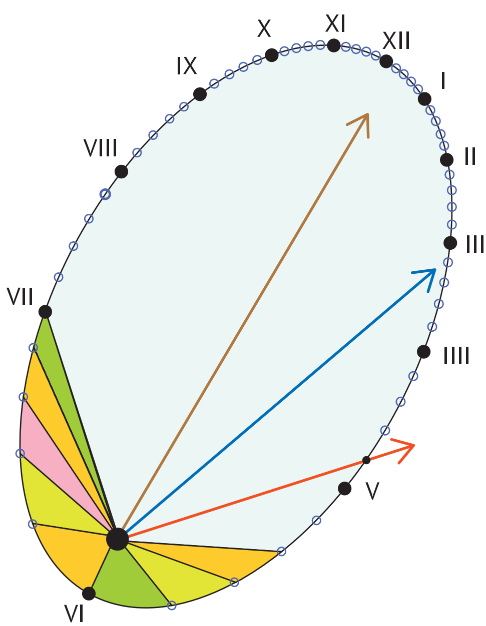


Рис. 7. Часы Кеплера:
12 часов, 16 минут и 24 секунды

решалась числено: отрезок времени от нуля до 3100 лет (период обращения кометы) разбивался на маленькие периоды (на месяцы), в которых методом Рунге-Кутты с переменным шагом рассчитывались координаты кометы. Затем по этим дискретным значениям интерполяцией генерировались функции $x(t)$ и $y(t)$. По этим функциям и было определено местоположение кометы в 2024 году: $x = 33.15$ $y = –20.45$ астрономических единиц, что и отмечено крестиком на синей орбите, показанной на рис. 4.

Взяв производные по времени от функций $x(t)$ и $y(t)$, несложно рассчитать скорости кометы относительно Солнца в перигелии (41.4 км/с) и в 2024 г. (2.4 км/с). В афелии скорость самая маленькая – 104 м/с.

На рис. 6 чёрными точками отмечены ежемесячные положения кометы в 1811 и 1812 годах, рассчитанные по программе, показанной на рис. 5. Пунктир, проходящий около точек, – это дуга эллипса, изображённого на рис. 4. Близость точек (численное решение) к пунктирной кривой (аналитическое решение) свидетельствует о приемлемой точности расчёта. Комета была обнаружена впервые 25 марта 1811 года Оноре Фложергом на расстоянии в 2.7 а.е. от Солнца. Это отображено на рис. 6 дугой окружности (красный пунктир). Полная окружность – это не орбита Земли вокруг Солнца, а просто окружность с радиусом в одну астрономическую единицу.

На рис. 6 можно также видеть графическую иллюстрацию второго закона Кеплера, гласящего, что каждая планета или комета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, причём за равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету (комету), описывает собой равные площади s_1, s_2, s_3 и т.д. В связи с этим возникла идея создать часы с эллиптическим циферблатом (рис. 7), стрелки которых вращаются с переменной скоростью согласно второму закону Кеплера. Ось стрелок находится в одном из фокусов эллипса, а сами стрелки имеют переменную длину. Такие часы сложно сделать механическими, но электронными с дисплеем – нет проблем. Они могут быть весьма уместными в аудитории, где читаются лекции по астрономии, или на фасаде соответствующего учебного заведения.

Кеплер же здесь упомянут не случайно. Его три закона позволили Ньютону постулировать ранее упомянутый закон всемирного тяготения, ставший фундаментальным в классической небесной механике, одну из задач которой мы только что решили.

И последнее.

Хвост Кометы 1812 года, показанный на рис. 1, приводит на память пушкинские строки о Евгении Онегине: “*Вошел: и пробка в потолок, // Вина кометы брызнул ток…*” Если же к винной пробке добавить немного физики (героини нашей статьи), то можно вспомнить такой рассказ Сергея Капицы.

Дело было в 60-х годах прошлого века. Группа молодых физиков из закрытого НИИ поехала на Чёрное море[7]. Все как один – доктора не просто наук, а физико-математических наук. Пошли на берег, по пути купив несколько бутылок винца с белой пластмассовой пробкой – не пробкой, а скорее крышкой, которую надо срезать ножом. Было такое “вино” в советские времена, его называли бормотухой, чернилами, плодово-выгодным… Приходят на пляж, приготовились уже, и – опаньки! А бутылки открывать нечем... Видят невдалеке старичка, собирающего пустые бутылки. Спрашивают:

– Уважаемый, а у вас бутылочку открыть не найдётся чего-нибудь?

– Откроем, как не открыть! Спички есть?

Ему недоуменно протягивают коробок. Мужик зажигает спичку, нагревает пробку и срывает её, уже размякшую, приговаривая:

– Физику надо было в школе учить, салаги!

В наше время физику (астрофизику!) можно и нужно не только учить, но и применять полученные знания для моделирования небесных явлений. В качестве, например, своеобразного хобби. Что мы и описали в данной статье, ответив заодно на вопрос о том, где сейчас находится комета 1812 года.

Астрономы-любители в своё время открыли много небесных явлений и объектов. Можно говорить и об астрофизиках-любителях. Двое из которых – авторы этой статьи – “открыли” современное нахождение Кометы 1812 года.

---

[7] Один из таких физиков позже оказался на море уже в другой компании – см. фильм “Три плюс два”.