Глава 5. Наш старый знакомый маятник

Разбудите старшеклассника или студента и спросите, чему равен период колебания маятника. Он без запинки ответит: "*Два пи, помноженное на корень от эль, деленное на же*". Но вряд ли кто скажет, какое ограничение заложено в этой формуле и верна ли она вообще по большому счету.

Давайте за пару минут установим на компьютере отечественную свободно распространяемую физико-математическую программу SMath Studio (www.smath.com) и решим на ней задачу о колебании маятника.

Итак, мы сажаем в компьютерном классе (а лучше в компьютеризированном физическом кабинете) школьников и целый день в рамках занятий по новой учебной дисциплине МИТ (Математика-Информатика-Техника) разбираем задачу о колебании маятника. Предварить такое занятие можно реальным экспериментом – демонстрацией качания маятника, благо он есть почти в каждом физическом кабинете. Можно замерять два значения: длину нити маятника и период его колебания – запустить секундомер и подсчитать число взмахов маятника за определенный период времени. Можно менять длину нити маятника и попытаться связать этот параметр с периодом колебания маятника – пометить эти точки на графике и провести через них кривую – линию тренда, как сейчас говорят.

На рисунке 5.1 показана схема задачи о маятнике, позволяющая составить дифференциальное уравнение, показанное на рис. 5.2. Маятник у нас математический – это материальная точка, имеющая массу m, но не имеющая размеров, подвешенная к неподвижной точке с помощью невесомого жесткого стержня длинною L в однородном гравитационном поле с ускорением свободного падения g.

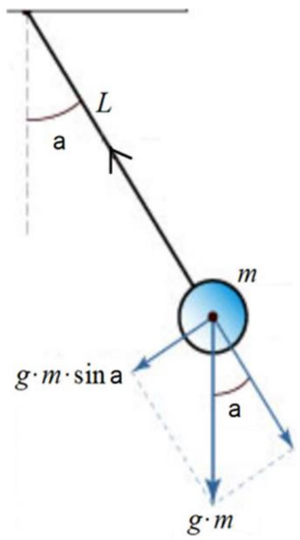


Рис. 5.1. Схема задачи о колебании математического маятника

Маятник

На рисунке 5.2 показано, как в среде самого мощного в мире математического пакета Maple[1] вводится дифференциальное уравнение (*ДУ*) второго порядка и начальные условия (НУ) задачи: маятник отклонили от вертикали на угол a_0 и отпустили в свободный полет с нулевой начальной скоростью. Угол a_0 может быть больше 90°, а начальная скорость ненулевой. Поэтому-то мы и упомянули стержень, а не нить подвески маятника. Если стержень имеет вес, то это будет уже не математический, а физический маятник. Выражение D(*a*) (0) означает, что угловая скорость маятника (первая производная функции угла *a* по времени) равна нулю. Далее вызывается встроенная в Maple функция *dsolve*, которая выдала ответ, иллюстрирующий известный афоризм о том, что математики часто дают абсолютно точный и абсолютно бесполезный ответ.

$$ДУ := m\cdot\frac{d^2}{dt^2}a(t)\cdot L = -g\cdot m\cdot\sin(a(t)) :$$

$$НУ := a(0) = a_0,\quad D(a)(0) = 0 :$$

$$dsolve(\{ДУ,\ НУ\})$$

$$a(t) = RootOf\left(\int_{\_Z}^{a_0} \frac{L}{\sqrt{-2\,L\,g\,(\cos(a_0) - \cos(\_a))}}\,d\_a + t\right),$$

$$a(t) = RootOf\left(\int_{a_0}^{\_Z} \frac{L}{\sqrt{-2\,L\,g\,(\cos(a_0) - \cos(\_a))}}\,d\_a + t\right)$$

Рис. 5.2. Аналитическое решение задачи о математическом маятнике в среде Maple

Уравнение на первой строке рисунка 5.2, является математической записью второго закона Ньютона. Масса маятника *m*, умноженная на его тангенциальное ускорение (на вторую производную от углового перемещения, умноженную на длину маятника), равна силе, приложенной к маятнику в том же тангенциальном направлении. Эта проекция силы равна произведению $g \cdot m$, умноженному на **синус** угла *a* отклонения маятника от вертикали. Синус здесь выделен жирным шрифтом неслучайно: решение этого простого дифференциального уравнения с начальными условиями (задача Коши) вылилось в довольно сложное выражение. Нужно думать, что с ним делать. Это так называемый синус Якоби, где присутствует корень выражения (*RootOf*), интеграл, но никак не просматривается вышеупомянутая формула периода колебания маятника. Да и самих решений два. Но если из исходного уравнения убрать синус (а это позволительно делать только при малых углах отклонения маятника от вертикали, когда синус примерно равен своему углу), то решением будет всем известное «школьное» уравнение колебания маятника (см. рис. 5.3) с косинусом и с периодом τ, который спросонья без запинки «озвучил» старшеклассник.

[1] Эту пальму первенства оспаривает пакет Mathematica, сетевую версию которого под названием WolframAlpha знают многие школьники и студенты. WolframAlpha, кстати, решил задачу, показанную на рис. 1, только в своей платной (лицензионной) версии, которую у нас в настоящее время по понятным причинам легально получить невозможно.

Маятник

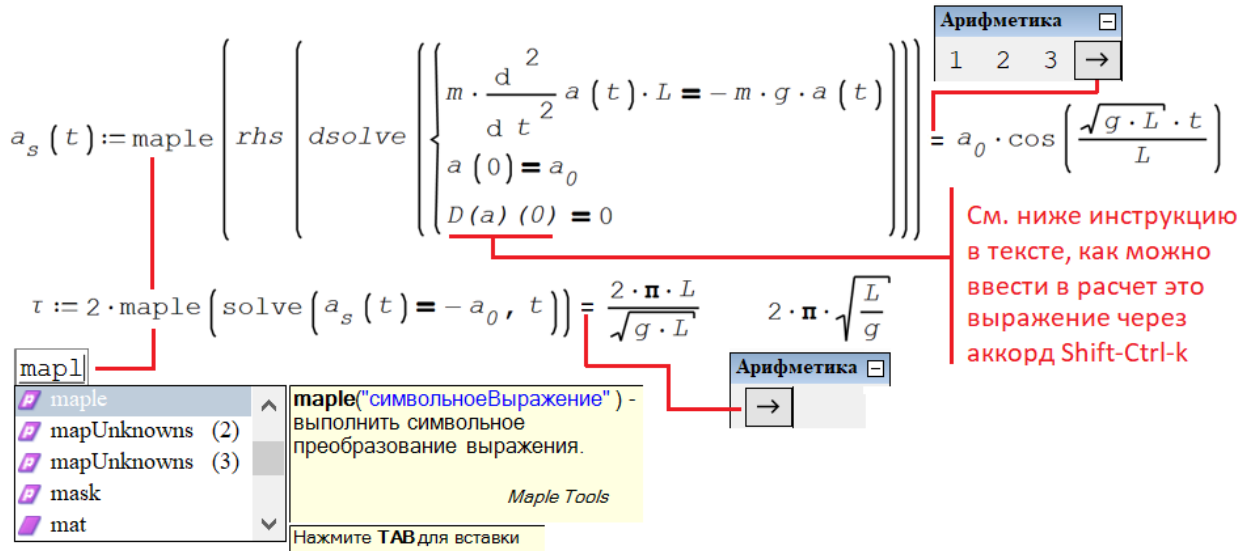


Рис. 5.3. Аналитическое решение упрощенной задачи о математическом маятнике в среде SMath

Решение, показанное на рис. 5.3, получено в среде SMath, к которой подсоединили дополнение (плагин) с инструментами пакета Maple. Вызываются три Maple-функции: `dsolve` (решение дифференциального уравнения), `rhs` (возврат правой части уравнения – right hand side) и `solve` (решение алгебраического уравнения). Последняя функция возвратила выражение для значения времени, при котором наш маятник качнется на угол, равный минус a_0. Если полученное выражение умножить на два, то и выйдет формула периода колебания маятника, которую вручную преобразовали до всем известного вида.

Выражение `D(a) (0)` $=$ 0 в решении на рис. 5.3 означает, что первая производная (D – differential) функции с именем a равна нулю ($=$ 0) при аргументе равном нулю `(0)` – скорость маятника в нулевой момент времени равна нулю. Это выражение вводится в расчет так. Водится буква D, затем нажимаются одновременно три клавиши – Shift, Ctrl и k. После ввода такого «аккорда» цвет курсора станет красным. После этого можно будет набрать шесть символов (, a,), (, 0 и). Появится выражение `D(a) (0)`. Затем нужно еще раз одновременно нажать три клавиши – Shift, Ctrl и k. Красный цвет курсора пропадет и можно будет дописать выражение – ввести символ булева оператора «равно» (Ctrl+=) и цифру ноль.

Полное (с синусом), а не упрощенное дифференциальное уравнение маятника можно решить в среде SMath, но не аналитически[2], а численно – см. рис. 5.4. Для этого отрезок времени от нуля до 5.4 τ (четыре периода колебания маятника) разбивается на 1000 отрезков, где по особому алгоритму вычисляются дискретные значения функции $a(t)$ и ее первой производной. Все это

[2] Если вставить синус в уравнение, показанное на рис. 5.3, то можно не дождаться ответа. Дело в том, что SMath использует плагин Maple в версии аж 1998 года. На рисунке 2 показана работа пакета Maple версии 2020 года, автор получил еще до революции, пардон, до санкций. Законность использования в среде SMath инструментов из других математических пакетов не совсем ясна.

делает функция `rkfixed`[3]. Вычисленные значения складируются тремя столбцами в матрицу M, из которой функцией `col` изымаются векторы t (время) и a (угол). По этим точкам легко с помощью интерполяции создать функцию, а можно просто эти точки отобразить на графике – см. нижнюю часть рис. 5.4.

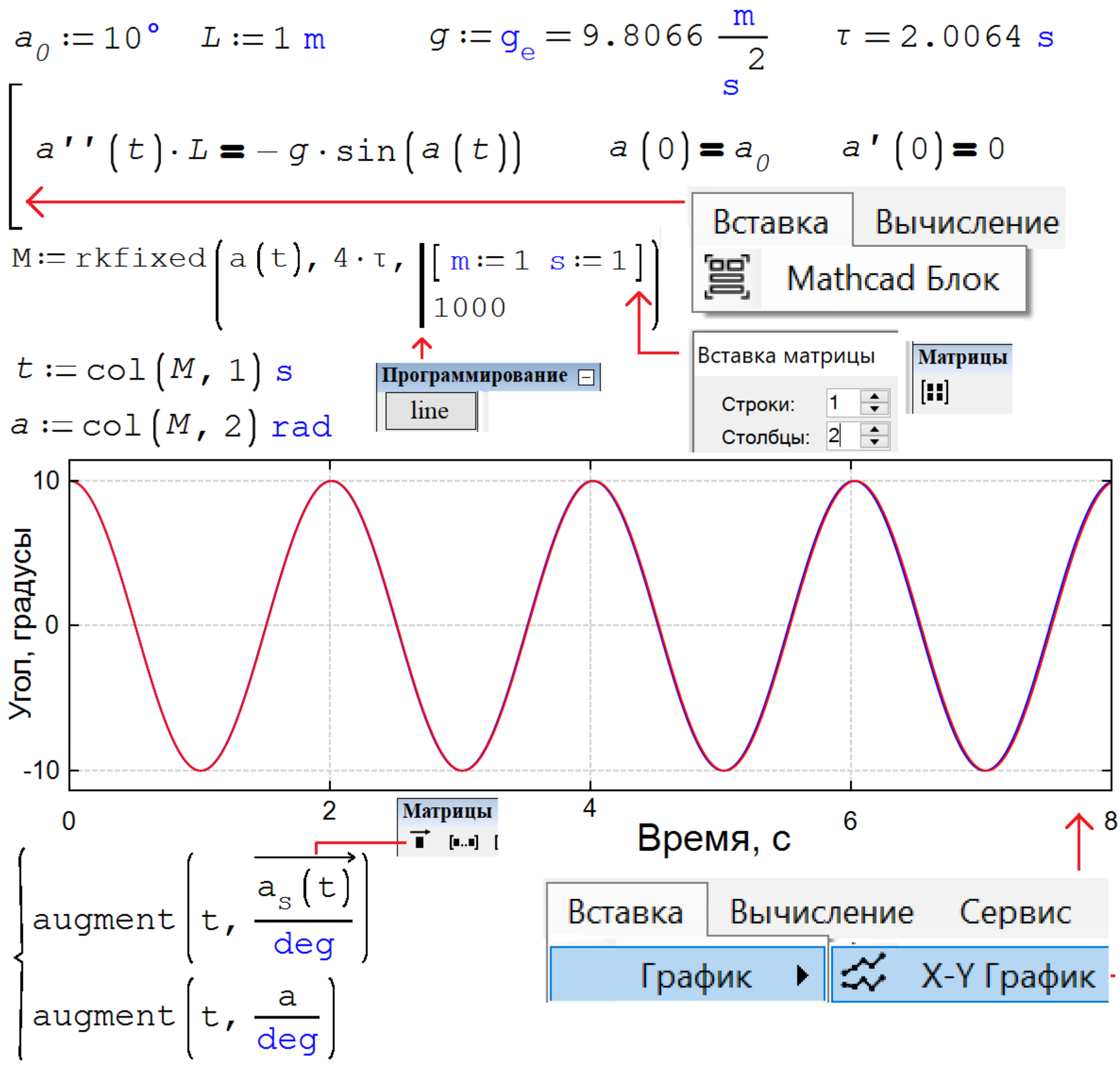


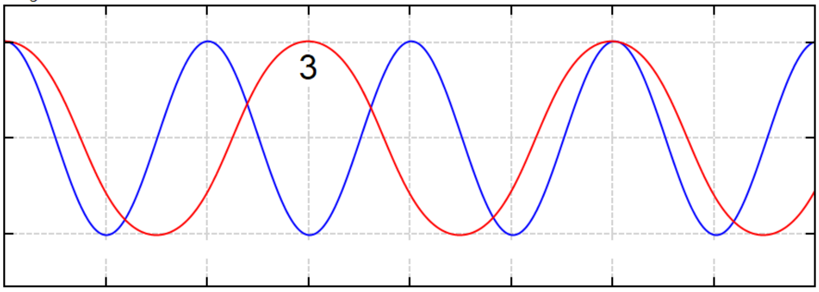
Рис. 5.4. Численное решение полной задачи о маятнике в среде SMath

На графике отображены точки из численного решения задачи о маятнике и функция $a_s(t)$, полученная при аналитическом (символьном – s) решении задачи, показанном на рис. 5.3 (так называемое гармоническое колебание). Эти линии слились в одну кривую. Только на правом конце графика, прищурив глаза, можно заметить их незначительную раздвоенность. Если увеличивать угол начального отклонения маятника или (а об этом часто забывают при реальной или виртуальной работе с маятником) сделать начальную скорость маятника ненулевой – подтолкнуть его в начале полета), то эти две кривые «отклеятся» друг от друга – см. рис. 5.5.

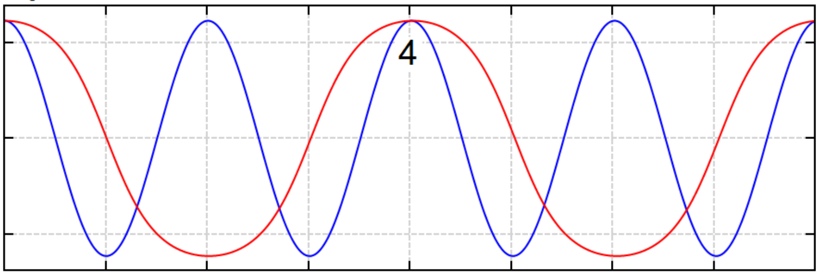
[3] В нее заложен метод Рунге – Кутты (rk) с фиксированным (fixed) шагом (https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_Рунге_—_Кутты). Чтобы вызвать эту функцию, нужно к среде SMath подсоединить еще один плагин – инструменты пакета Mathcad.

Маятник

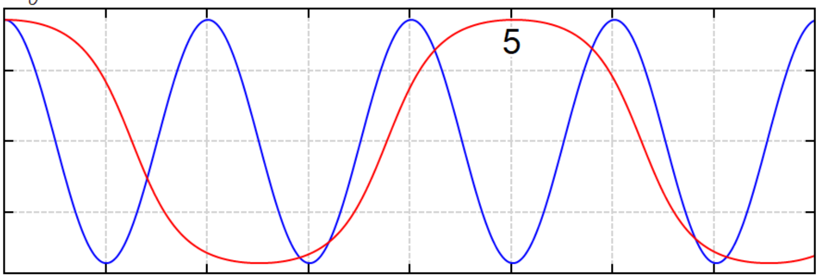
$a_0 \approx 132°$



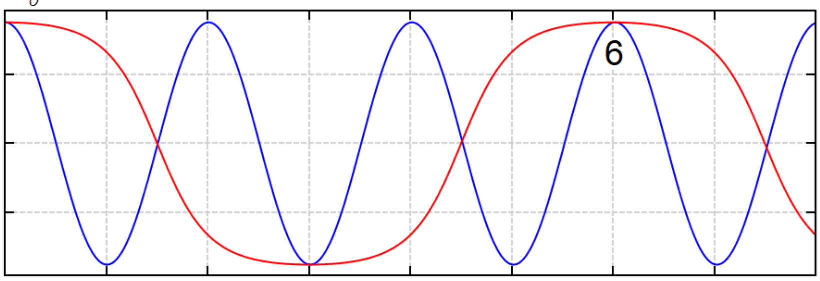
$a_0 \approx 160°$



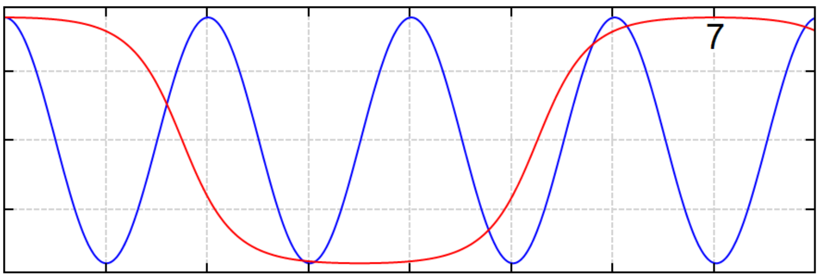
$a_0 \approx 171°$



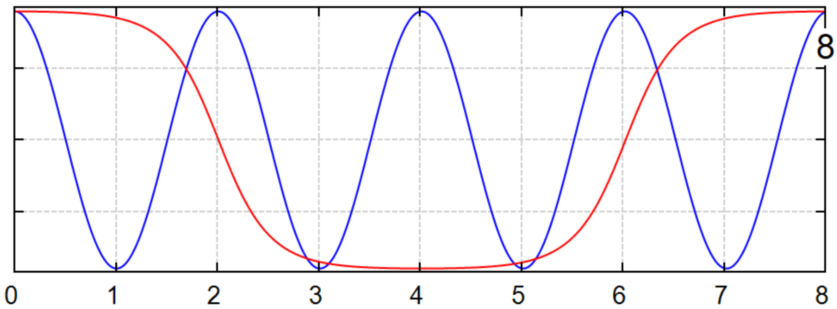
$a_0 \approx 175.8°$



$a_0 \approx 178.1°$



$a_0 \approx 179.15°$



Маятник

Рис. 5.5. Графическое отображение численного решения упрощенной и полной задачи о маятнике при разных начальных углах

Можно провести несложный численный эксперимент и показать, что двойка в формуле периода колебания математического маятника легко превращается (см. рис. 5.5) в тройку, четверку, пятерку, шестерку, семерку, восьмерку… И вообще, там может быть любое действительное число от двух до бесконечности… Бесконечность здесь имеет конкретный математический смысл: если маятник поднять в самую верхнюю точку (a_0 = 180°), то при нулевой начальной скорости он останется в неподвижном неравновесном состоянии с периодом колебания, равном этой самой бесконечности. Малейшее возмущение приведет маятник в колебательное движение с периодом… см. рис. 5.5, на котором прорисованы и обычный синус (косинус, сдвинутый по оси абсцисс) и ранее упомянутый синус Якоби, который «растягивается» как пружина (о пружине мы расскажем ниже) до тех пор, пока не превратиться в прямую линию, когда маятник стоит вертикально и неподвижно.

Так что умный школьник или студент при ответе на вопрос о периоде колебания математического маятника должен… прочитать эту главу учебника и дать такой ответ: "*Примерно два пи, помноженное на корень от L, деленное на g,* да и то, *если начальный угол отклонения маятника от вертикали невелик, а начальная его скорость тоже мала или вообще равна нулю!*". В противном случае все намного сложнее и… интереснее.

В решении на рисунках 5.2 и 5.3 масса маятника (переменная *m*) не сокращена. Это сделано намерено для того, чтобы в уравнении ясно просматривалась «физика» задачи – математическое выражение для второго закона Ньютона. Математические пакеты сами все «сократят» без нашей помощи. А вот в решении на рис. 5.4 эту переменную в уравнении маятника сократили. В противном случае при численном, а не аналитическом решении задачи пришлось бы вводить значение массы маятника, которое по сути задачи было бы там лишнее. На рисунке 5.4 показано, что значения начального угла, длины маятника и ускорения свободного падения вводятся с единицами измерения, что очень удобно и полезно при решении задач математической физики, к коим относиться наша задача о маятнике. Но функция `rkfixed`, встроенная в SMath через плагин Mathcad, не приемлет единиц измерения в аргументах. Поэтому пришлось «обмануть» эту функцию, обозначив в ее третьем аргументе единичные (безразмерные) локальные значения метра и секунды. Вектору *t*, изъятому из матрицы *M*, при этом было приписана размерность времени: `t := col(M, 1)`, умноженное на секунду. К вектору *a* был приписана единица `rad` (радиан) просто как комментарий, отмечающий, что это именно угол. Эта угловая единица сама по себе безразмерная, хотя это не совсем верно: радиан – это метр (длина дуги окружности), деленный на метр (длина радиуса).

Дивертисмент. О метре из Википедии

Если еще раз разбудить школьника или студента и спросить его, что такое метр, то он скорее всего ответит, что это какая-то там доля какого-то там меридиана Земли или что-то такое, связанное со светом (длина пути, проходимого светом в вакууме за заданное время). Но почти никто не вспомнит, что метр пошел от метрового маятника напольных часов (рис. 5.6), имеющего период колебания в две секунды – см. четвертый оператор на рис. 5.4. Каждый взмах маятника таких часов через систему шестеренок перемещал секундную стрелку на 6 угловых градусов, минутную и часовую на… подсчитай, читатель, сам! Внизу такого маятника на резьбовой шпильке есть пара гаек, вращая которые можно менять длину маятника и заставлять часы идти точно. Остановится маятнику не дает заводная пружина часов или гиря, которую время от времени нужно с треском поднимать вверх.

Рис. 5.6. Напольные часы с метровым маятником

У гоголя в «Мертвых душах» есть прекрасные строки «*Слова хозяйки были прерваны странным шипением, так что гость было испугался; шум походил на то, как бы вся комната наполнилась змеями; но, взглянувши вверх, он успокоился, ибо смекнул, что стенным часам пришла охота бить. За шипеньем тотчас же последовало хрипенье, и наконец, понатужась всеми силами, они пробили два часа таким звуком, как бы кто колотил палкой по разбитому горшку, после чего маятник пошел опять покойно щелкать направо и налево.*» У стенных часов период колебания

маятника составляет одну секунду, а не две, как у напольных часов (рис. 5.6). Несложно подсчитать длину маятника стенных часов – что-то около 25 см.
В Европе со времён распада империи Карла Великого не существовало общих стандартных мер длины: они могли быть стандартизированы в пределах одной юрисдикции (которая зачастую имела размеры одного торгового городка), но единых мер не было, и каждый регион мог иметь свои собственные. Причиной этого служило в какой-то мере то, что меры длины использовались в налогообложении (налог, например, мог измеряться в определённой длине полотна), а поскольку каждый местный правитель вводил свои налоги, то для соответствующей местности законами устанавливались свои единицы измерений.
С развитием науки в XVII веке стали раздаваться призывы к введению «универсальной меры» (universal measure, как назвал её английский философ и лингвист Джон Уилкинс в своём эссе 1668 года) или «католического метра» (metro cattolico) итальянского учёного и изобретателя Тито Ливио Бураттини из его работы «Misura Universale» 1675 года, меры, которая бы основывалась на каком-либо естественном явлении, а не на постановлении властьдержащей персоны, и которая была бы десятичной, что заменило бы множество разнообразных систем счисления, например, распространённую двенадцатеричную, одновременно существовавших в то время.
Идея Уилкинса заключалась в том, чтобы выбрать для единицы длины длину маятника с полупериодом колебаний равным одной секунде. Подобные маятники были незадолго до этого продемонстрированы Христианом Гюйгенсом (рис. 5.6), и их длина была весьма близка к длине современного метра (так же, как к единицам длины, использовавшимся в те времена, например, ярду). Однако, вскоре было обнаружено, что длина, измеренная таким способом, различается в зависимости от места измерений. Французский астроном Жан Рише во время экспедиции в Южную Америку (1671—1673) обнаружил увеличение периода колебаний секундного маятника по сравнению с тем, который наблюдался в Париже. Выверенный в Париже маятник в процессе наблюдений им был сокращён на 1,25 французской линии (~ 2,81 мм), дабы избежать отставания во времени на две минуты в день. Это было первое прямое доказательство уменьшения силы веса и силы тяжести, действующих на тело, по мере приближения к экватору, и это дало разницу в 0,3 % длины между Кайенной (во французской Гвиане) и Парижем.
Вплоть до французской революции 1789 года в вопросе установления «универсальной меры» не было никакого прогресса. Франция была озабочена вопросом распространения единиц измерений длины, необходимость реформы в этой области поддерживали самые различные политические силы. Талейран возродил идею о секундном маятнике и предложил её Учредительному собранию в 1790 году, с тем уточнением, что эталон длины будет измерен на широте 45° N (примерно между Бордо и Греноблем). Таким образом, метр получал следующее определение: метр — это длина маятника с полупериодом колебаний на широте 45°, равным 1 с.
Первоначально за основу было принято это определение (8 мая 1790, Французское Национальное собрание). Но несмотря на поддержку собрания, а также поддержку Великобритании и новообразованных Соединённых Штатов, предложение Талейрана так и не было осуществлено. (подробнее https://ru.wikipedia.org/wiki/Метр).
Конец дивертисмента

На сайте пользователей пакета SMath по адресу https://en.smath.com/forum/yaf_postsm84202_Derivative-in-Maple.aspx подробно обсуждалась задача о маятнике. В частности, была решена эта задача для случая, когда маятник висит на эластичной подвеске – на некой пружине с нулевой массой, которая способна растягиваться и сжиматься. На рисунке 5.7 показаны три кадра анимации движения такого маятника – прорисовывание его траекторий движения.

Маятник

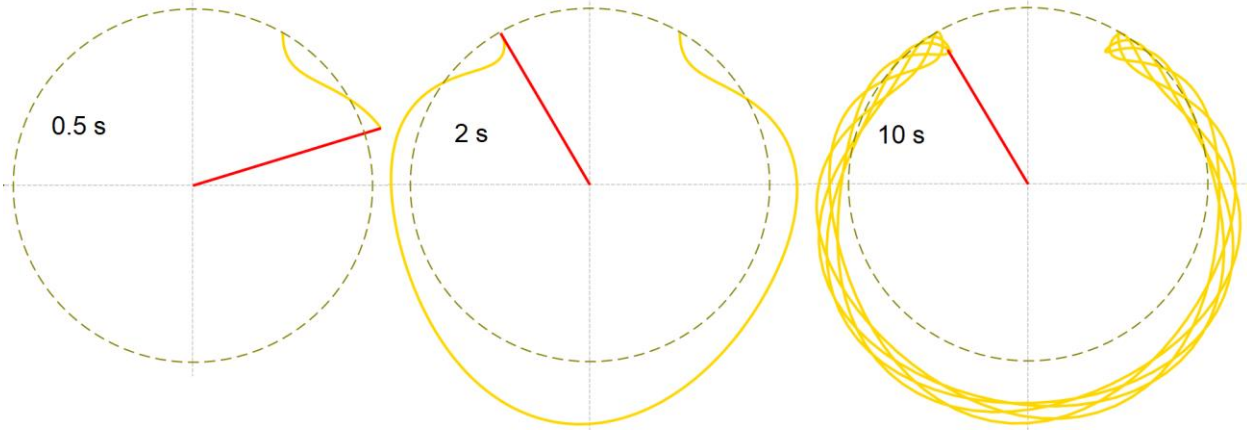


Рис. 5.7. Маятник на эластичной подвеске

Траектория движения маятника на рис. 5.7 прорисована цветом gold – золото. И это неслучайно. Мы получили математический объект, который можно назвать *гривной* – украшением, надеваемым на шею – на то место, где у некоторых животных растет грива (см. рис. 5.8).

Рис. 5.8. Гривна

Дивертисмент об эластичности

Если еще раз разбудить школьника или студента и спросить его, по какому закону растягивается (сжимается) резинка (пружина), то он опять же без запинки ответит: «*По закону Гука, гласящему, что растяжение/сжатие пропорционально приложенной силе!*». Но если полазить по интернету, то можно узнать, что практически нет материалов, которые при деформации ведут себя так, как прописано этим законом даже при незначительных сжатиях или растяжениях. Это вторая «незначительность» маятника, если вспомнить о «незначительности» отклонения маятника от вертикали, которую мы рассмотрели выше.

В физическом кабинете школы можно провести еще один эксперимент – подвесить на штативе пружину, нагружать ее и замерять, насколько она будет растягиваться. Полученные точки затем нанести на график и очертить их некой кривой (рис. 5.9). Нахождение вида этой кривой показано в главе 6 на рис. 6.14.

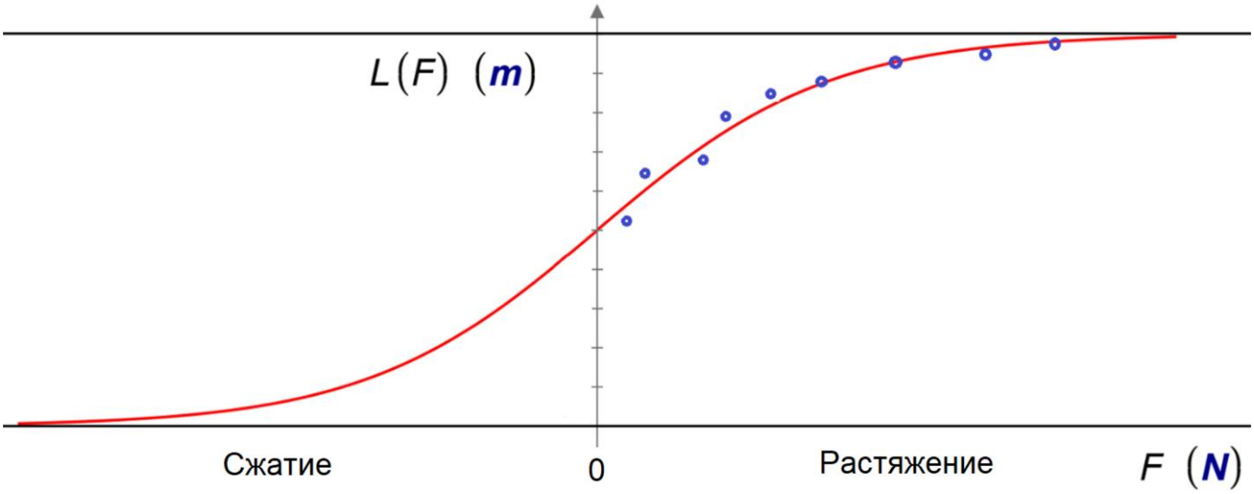


Рис. 5.9. Графическое отображение нелинейного закона Гука

На рисунке 5.9 прописана так называемая *логистическая функция*, которая достаточно точно описывает свойство эластичной подвески маятника: она под действием силы F сначала растягивается/сжимается более-менее линейно, а затем эластичность исчерпывается и связь становится жесткой.

Дивертисмент о логистической функции

Логистическое уравнение, также известное как уравнение Ферхюльста (по имени впервые сформулировавшего его бельгийского математика), изначально появилось при изучении изменений численности населения. Было составлено соответствующее дифференциальное уравнение, решение которого и дало данную функцию.

Почему Ферхюльст назвал уравнение логистическим, остается загадкой. Тем не менее, эта S-образная кривая широко используется для отображения развития многих процессов (https://ru.wikipedia.org/wiki/Логистическое_уравнение). Так, например, качественно выглядит количество выпущенных в мире паровозов: они появились в начале XIX века (первая промышленная революция), потом их количество стало возрастать, а затем их вытеснили тепловозы и электровозы. Наша замена линейного закона Гука на нелинейную модель – это еще один пример использования этой кривой.

На рисунке 5.9 можно видеть точки, которыми «облеплена» логистическая кривая. Представим себе, что это графическое отображение эксперимента, который еще Гук проводил. Берется резинка, на которую подвешивают груз с известным весом (см. выше). Длину резинки измеряют. Потом вес груза увеличивают и делают новые замеры длины резинки. Так делают до тех пор, пока резинка перестанет растягиваться или просто порвется. Затем точки на графике обрабатывают методом наименьших квадратов. В среде SMath, кстати, есть для этого нужные инструменты. Например, функция `Fit` (a fitting – сглаживание) из еще одного плагина для SMath – из математической программы Maxima.

Конец дивертисмента

На рисунке 5.10 показана проверка решения задачи о маятнике на растяжке: строятся графики изменения во времени трех видов энергии: кинетической энергии маятника (функция KE), потенциальной энергии маятника (PE) и потенциальной энергии сжатой или растянутой пружины (SE), а также сумма (ΣE) этих трех видов энергии. Потенциальная энергия маятника переходит в кинетическую энергию и энергию растянутой пружины и наоборот. Но сумма этих трех энергий остается постоянной. Это прямо свидетельствует о верности закона сохранения энергии и (косвенно) о высокой точности численного метода решения данной задачи.

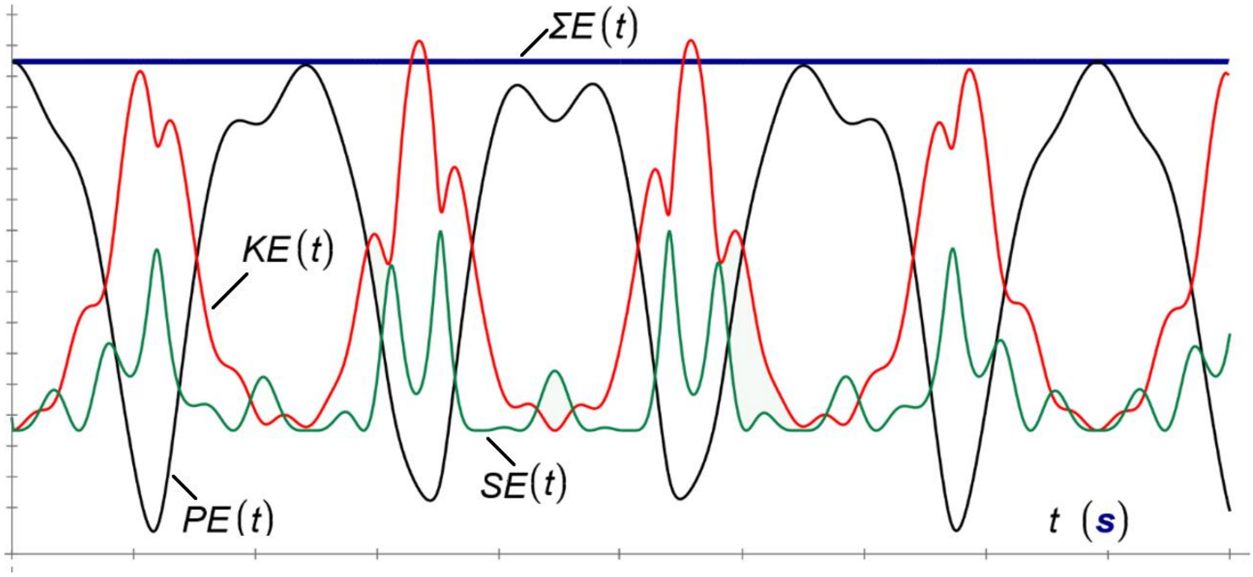


Рис. 5.10. Изменение трех видов энергии качающегося маятника на эластичной подвеске

Дивертисмент о потенциальной энергии пружины
Мы уже замучили нашего студента вопросами-побудками. Но давайте разбудим его последний раз и спросим, чему равна потенциальная энергия сжатой или растянутой пружины. Ответ заранее известен: "*Половина квадрата отклонения пружины от исходной точки, деленная на коэффициент упругости*". Все помнят эту формулу, но опять же никто не знает, откуда она взялась и что она по большому счету опять же неверна. Вернее, верна только для частного, линейного случая.
Конец дивертисмента

Да, формула потенциальной энергии растянутой пружины «с квадратом и половинкой» вытекает из линейного закона Гука. Но об этом многие забывают, как забывают и о том, что формула периода колебания маятника, с которой мы начали эту главу, также является частным «линейным» случаем. Нам же с нашим нелинейным законом подвески маятника придется от готовой формулы отказаться и идти к истокам: вспомнить, что энергия («несделанная работа») – это сила, умноженная на перемещение[4]. Отсюда возникает определенный интеграл силы по расстоянию в формуле для потенциальной энергии пружины. Если же в данный интеграл вписать линейную функцию Гука и взять его (не Гука, конечно, а интеграл), то и получится формула с квадратом значения растяжения пружины, деленным на два[5] и деленным на коэффициент эластичности.

Еще одну нелинейность в задаче о колебаниях маятника или другого объекта, связанную с сопротивлением среды, приводящей к затуханию движения маятника, мы рассмотрим на примере гравитационного поезда – специфического вида маятника.

[4] Юмористическая переделка старой пословицы: «Работа не волк, а произведение силы на расстояние!».

[5] Человек идет по улице, смотрит в смартфон (увлеченно читает эту книгу, например) и врезается в столб. Другой человек пытается стрельнуть из рогатки, растягивает резинку, но она обрывается и бьет его по лбу. Эти две неприятные ситуации можно сгладить юмором и сказать: «Хорошо, что пополам!».

Маятник

Есть легенда о том, как Николай I перед строительством железной дороги из Санкт-Петербурга в Москву положил на карту линейку и провел карандашом прямую линию между этими двумя столицами Российской империи.

А вот еще один анекдот, но уже не исторический, а наших дней. Один человек сдавал в бухгалтерию отчет о командировке, в котором цена железнодорожного билета из Москвы в Петербург была несколько выше цены обратного билета. На вопрос бухгалтера, откуда взялась такая разница, подотчетное лицо посоветовало взглянуть на глобус: из Санкт-Петербурга в Москву в поезд катится под горку, а на обратном пути поднимается вверх!

Николай I для еще большего сокращения пути должен был не просто прочертить карандашом прямую линию на карте, а просверлить в глобусе прямое отверстие, соединяющее Москву с Петербургом!

Шутки шутками, но уже давно обсуждается полуфантастический проект так называемого *гравитационного поезда*, катящегося без трения в прямолинейном подземном туннеле (рис. 5.11). Первую половину пути такой поезд будет катиться под горку без какой-либо тяги локомотива, а вторую половину пути начнет по инерции подниматься вверх, замедляясь до остановки в пункте назначения.

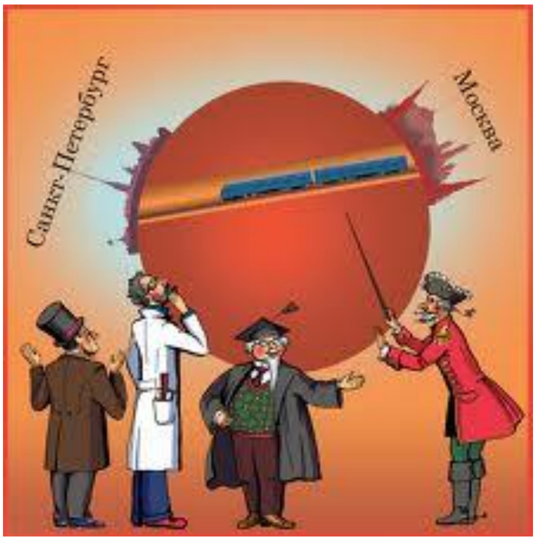


Рис. 5.11. Схема гравитационного поезда

Если такой поезд пустить не в прямолинейном подземном туннеле, а в трубе с выкачанным воздухом, проложенной на поверхности Земли, то он будет называться не гравитационным, а *вакуумным поездом*. И это будет уже не полуфантастический, а, если так можно сказать, *x*-фантастический проект, где *x* стремиться к нулю. Вспомним проект Hyperloop (Гиперпетля) Илона Маска, основателя фирмы SpaceX. Можно предположить (пофантазировать), что буква *x* в названии этой фирмы как раз и связана со словосочетанием «*x*-фантастический проект». Но вернемся от фантазий к делу!

Маятник

В интернете (а рисунок 5.11 взят именно оттуда) «гуляет» множество формул, по которым можно оценить, сколько времени гравитационный поезд будет в пути и какой максимальной скорости он достигнет в середине туннеля. Но мы сейчас не будем считать по этим формулам, а составим баланс сил, действующих на гравитационный поезд, и решим получившееся *дифференциальное уравнение* — создадим функцию, возвращающую положение поезда в туннеле в зависимости от времени. Отказ от готовых формул позволит нам в дальнейшем усложнить модель и приблизить ее к реальности с силами трения.

На рисунке 5.12 изображена простейшая расчетная модель гравитационного поезда: на планете Земля (идеальный шар с радиусом R) сделан прямолинейный туннель (пунктирная линия) длиной L, по которому катится поезд. Начало декартовых координат, от которого будет вестись отсчет, находится в центре Земли.

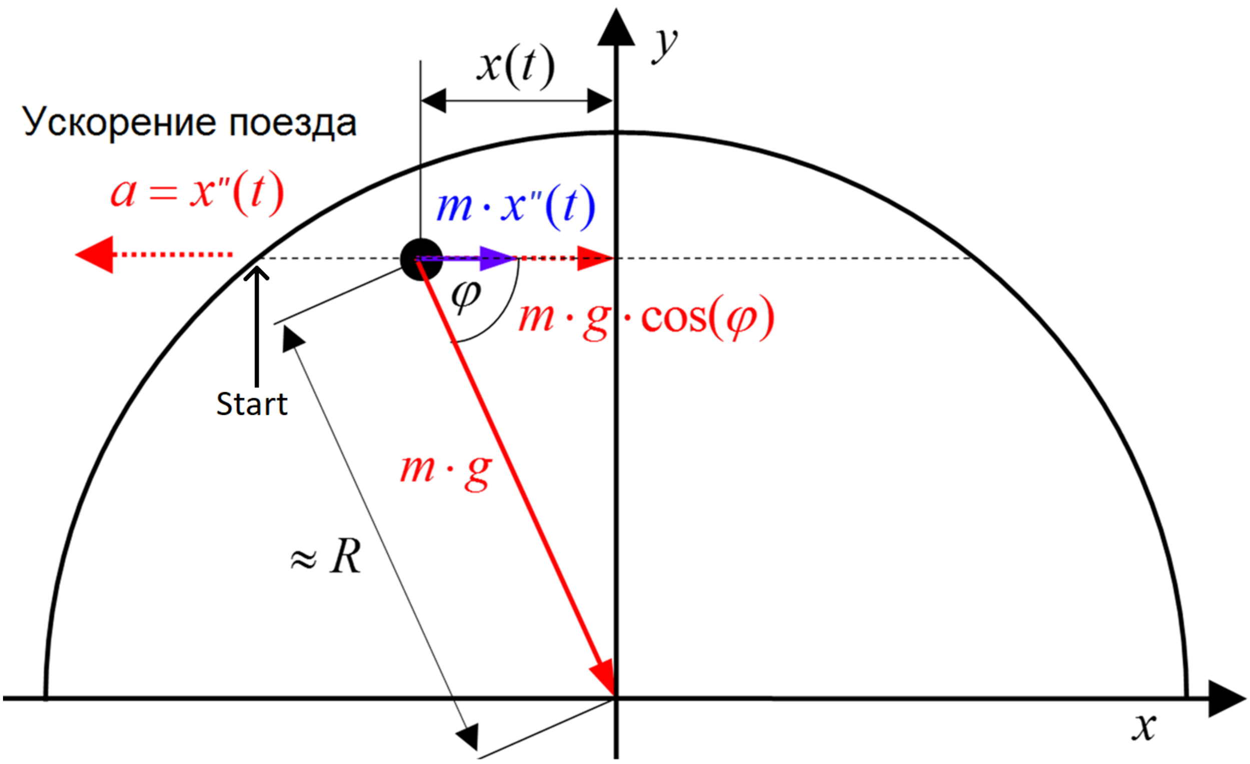


Рис. 5.12. Схема задачи о гравитационном поезде

Несложно доказать, что на наш поезд (на материальную точку, имеющую массу, но не имеющую размеров) вдоль координаты x будет действовать ускоряющая сила (первая половина пути) или тормозящая сила (вторая половина пути), равная весу поезда ($m \cdot g$), умноженному на отношение значения координаты x к радиусу Земли R[6]. Это положение

[6] Это отношение получено в предположении, что значение ускорения свободного падения g линейно зависит от расстояния от центра Земли. На поверхности Земли оно равно примерно 9.8 м/с^2, а в центре Земли нулю. Если туннель для гравитационного поезда будет неглубоким, то допустимо считать, что расстояние от поезда до центра земли равно примерно R (см. символ «примерно равно» на рис. 5.12), а

поезда будет зависеть от времени — будет функцией $x(t)$. Если от этой функции взять первую производную $x'(t)$, то мы получим скорость поезда, а если вторую производную $x''(t)$ — то его ускорение. Дифференциальное уравнение движения нашего гравитационного поезда будет иметь вид:

$$m \cdot x''(t) = -m \cdot g \cdot x(t) / R,$$

обусловленный вторым законом Ньютона: сумма сил, действующих на тело, равна произведению его массы на его ускорение.

На рисунке 5.13 показано аналитическое решение этого дифференциального уравнения с помощью пакета SMath с приложением Maple. Фигурные скобки объединяют само уравнение, начальное положение поезда $x(0) = -L/2$ (это Петербург или Москва), а также его нулевую начальную скорость `D(x)(0)=0`, что в переводе с мейпловского означает $x'(0) = 0$.

$$x(t) := \mathrm{maple}\left(rhs\left(dsolve\left(\left\{\begin{array}{l} m \cdot \frac{d^2}{d t^2} x(t) = -m \cdot g \cdot \frac{x(t)}{R} \\ x(0) = -\frac{L}{2} \\ D(x)(0) = 0 \end{array}\right.\right)\right)\right) = -\frac{L \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{g \cdot R} \cdot t}{R}\right)}{2}$$

$$\tau := \mathrm{maple}(\mathrm{solve}(x(t) = -x(0), t)) = \frac{\pi \cdot R}{\sqrt{g \cdot R}} \qquad \pi \cdot \sqrt{\frac{R}{g}}$$

$R := 6371$ км $\quad g := g_з \quad \tau = 42.2029$ мин **Земля**

$R := 1737$ км $\quad g := 1.62 \frac{м}{с^2} \quad \tau = 54.2177$ мин **Луна**

Рис. 5.13. Аналитическое решение задачи о гравитационном поезде

Решение на рис. 5.13 практически повторяет решение на рис. 5.3. Но синуса в дифференциальном уравнении нет на законных основаниях, а не по причине упрощения: гравитационный поезд в отличие от маятника движется по прямой, а не по дуге окружности.

Из решения на рис. 5.13 видно, что наш *x*-фантастический поезд будет в пути что-то около 42 минуты. Это значение является некой константой Земли, зависящей только от радиуса планеты и ускорения свободного падения на ней. Путь от дома до дачи, например, по такому туннелю займет такое же время. Для Луны, где гравитационный поезд будет

значение ускорения свободного падения g будет постоянной величиной. Наше же соотношение x/R в дифференциальном уравнении годится для всех случаев, вплоть до самого крайнего – *до гравитационного лифта*, когда туннель проходит через центр Земли. Но это будут уже гиперфантастический проект (x стремиться к бесконечности), если принять во внимание температуру в толще Земли, которую не выдержат стенки туннеля.

более уместен по причине отсутствия воздуха, эта константа будет равна примерно 54 минутам.

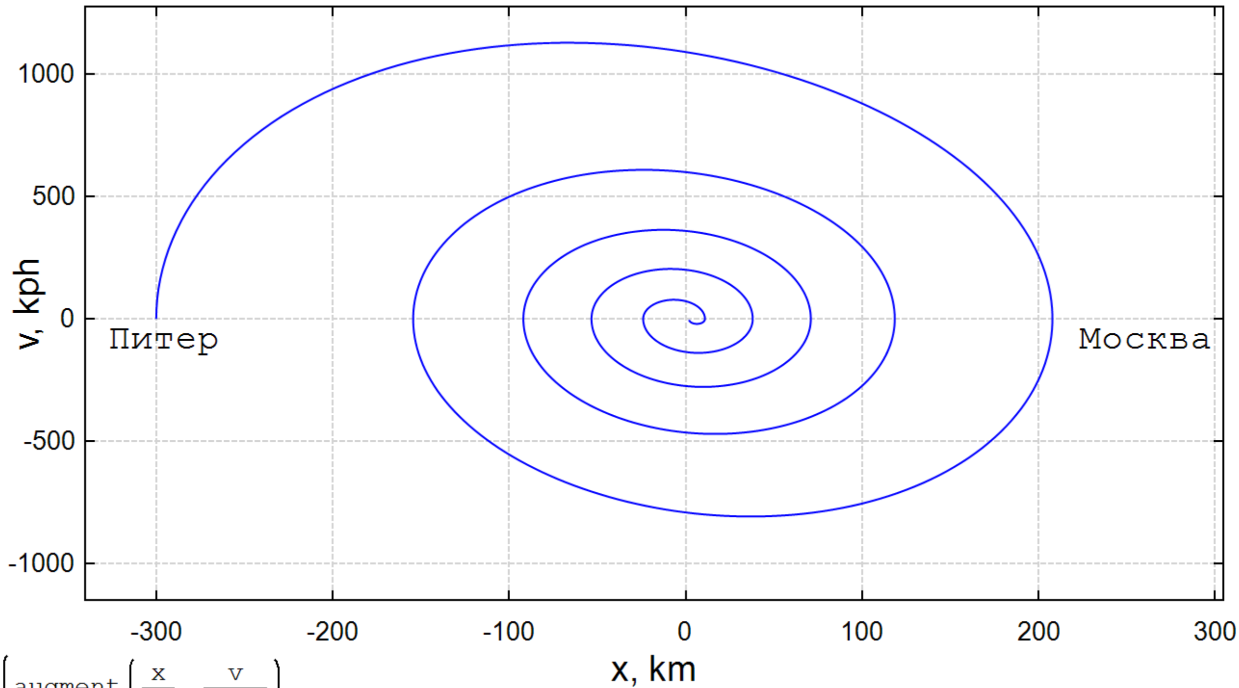
Уравнение, показанное на рисунке 5.13, можно дополнить силой сопротивления воздуха (если считать, что воздух в туннеле все же есть) и силой трения колес о рельсы. Так мы приблизим наш гравитационный поезд к реальным условиям. Поезд же у нас теперь будет не материальной точкой, а реальным физическим объектом с массой m и поперечным сечением S. Силу сопротивления воздуха обычно принимают пропорциональной (коэффициент k) плотности воздуха ρ_{air}, перемноженной на площадь поперечного сечения поезда S и квадрат его скорости $x'(t)$. Сила трения колес о рельсы пропорциональна (коэффициент трения качения f) той составляющей веса поезда, которая параллельна оси y. Такое усложненное дифференциальное уравнение уже нельзя будет решить аналитически, т. е. нельзя будет получить формулу для функции $x(t)$, подобную той, какая показана на рис. 5.13. Это уравнение нужно будет решать численно, приближенно, т. е. генерировать таблицу значений функции $x(t)$ при разных значениях t. На рисунке 5.14 показано это решение в среде SMath с построением фазового портрета в виде *аттрактора* – некой спирали, стремящейся с течением времени в начало координат. Если построить графики изменения во времени потенциальной и кинетической энергии нашего гравитационного поезда с силами трения, то график суммы этих энергий уже не будет горизонтальной линией (см. рис. 5.11), а станет плавно уменьшаться до нуля за счет рассеивания энергии и перехода ее в тепловую энергию.

Маятник

$$R := 6371\ \text{км} \quad m := 20\ \text{т} \quad S := 3\ \text{м}^2 \quad \rho_{air} := 1.25\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \quad k := 0.01 \quad f := 0.001 \quad t_{end} := 420\ \text{мин}$$

$$\left[\begin{array}{l} v(t) = x'(t) \qquad v(0) = 0\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \qquad x(0) = -300\ \text{км} \\ m \cdot v'(t) = -m\ g_з \cdot \frac{x(t)}{R} - \text{sign}(v(t)) \cdot \left(k \cdot \rho_{air} \cdot S \cdot \frac{v(t)^2}{2} + f \cdot m\ g_з \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x(t)}{R}\right)^2} \right) \end{array}\right.$$

$$M := \text{rkfixed}\left(\begin{Bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{Bmatrix}, \left| \begin{array}{l} [\ \text{м} := 1\ \ \text{кг} := 1\ \ \text{с} := 1\ ] \\ t_{end} \end{array} \right. \right) \qquad x := \text{col}(M, 2)\ \text{м} \qquad v := \text{col}(M, 3)\ \text{м/с}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{augment}\left(\frac{x}{\text{км}}, \frac{v}{\text{км/ч}} \right) \\ \text{augment}(-330, 0, \text{"Питер"}, 7, \text{"black"}) \\ \text{augment}(220, 0, \text{"Москва"}, 7, \text{"black"}) \end{array} \right.$$

Рис. 5.14 Численное решение задачи о гравитационном поезде с учетом сил трения

Две силы трения нужно перемножить на встроенную в SMath функцию-ступеньку `sign`, которая возвращает нуль, если ее аргумент равен нулю, единицу, если аргумент больше нуля, и минус единицу, если аргумент меньше нуля. Это сделано для того, чтобы силы трения поезда о воздух и колес о рельсы всегда действовали против движения поезда и равнялись нулю при нулевой скорости поезда. Если эту функцию из расчета убрать, то наша спираль превратиться в некое яйцо. Силы трения в одном направлении будут тормозить поезд, а в другом – его подталкивать. Получится некий однобокий незатухающий маятник. При высоких скоростях поезд будет тормозиться в основном за счет силы встречного ветра, а при низких скоростях — за счет силы трения качения колес[7].

Формула для силы сопротивления воздуха с ее вышеотмеченным коэффициентом k – это опять же довольно грубое упрощение. Одно дело, когда поезд едет на поверхности, а другое дело в тоннеле. Вспомним поезда метро, которые как поршень выталкивают воздух из тоннеля – из трубы, как говорят в Лондоне.

Задания читателям:

1. Воспроизвести расчеты, показанные в главе книги.
2. Создать расчет затухающего маятника на эластичной подвеске.
3. Создать модель гравитационного поезда, едущего не по прямолинейному туннелю, а по дуге окружности с радиусом, равным двум радиусам (диаметру) Земли.

[7] Вспомним приземляющийся самолет, который сначала уменьшает свою скорость за счет тормозных щитков или тормозного парашюта, а затем за счет колесных тормозов.