Консультация

Армагеддон и решение систем линейных алгебраических уравнений

В. Очков, М. Тахохова, Д. Лымарев, М. Алексеев, И. Корепанов

Аннотация: в статье обсуждаются особенности решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в среде математического пакета Mathcad на примере задачи о полёте астероида к Земле[1]. Задача рассматривается в ключе новой технологии обучения STEM.

Ключевые слова: небесная механика, кривая второго порядка, решение системы линейных алгебраических уравнений, матрица, вектор, Mathcad.

Дон Гуан
Её совсем не видно
Под этим вдовьим чёрным покрывалом,
Чуть узенькую пятку я заметил.

Лепорелло
Довольно с вас. У вас воображенье
В минуту дорисует остальное;
Оно у нас проворней живописца...

А.С. Пушкин. Каменный гость

Но лишь только глаза закрывались, сон улетал опять, и сознание становилось таким ясным, что Марков мог в уме решать алгебраические задачи на уравнения с двумя неизвестными.

Даниил Хармс. Сон дразнит человека

Краткое содержание голливудского фильма «Армагеддон», если кто забыл или совсем не знает, такое. К Земле приближается астероид «размером с Техас». Если ничего не делать, то через 18 дней он столкнётся с нашей планетой, и наступит этот самый Армагеддон – конец света[2]. Но на астероид посылается экспедиция, которая бурит там скважину и закладывает в неё

1 Сайт с расчётными файлами: https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/Armageddon-not-coronavirus/m-p/655474.

2 Армагеддон – упоминаемое в «Откровении Иоанна Богослова» место последней битвы сил добра с силами зла в конце времён. Иносказательно – конец света.

ядерный заряд. Астероид взрывается, а его осколки летят мимо Земли. Армагеддон переносится на более поздний срок.

В СМИ время от времени появляются сообщения о том, что к Земле на потенциально опасное расстояние приближается некий космический объект[3]. Специальные службы наблюдения за космическим пространством с помощью телескопов – наземных и орбитальных – сканируют ближайший космос и прогнозируют траектории полёта астероидов. А какие расчёты нужно сделать, чтобы оценить опасность сближения астероида с Землёй? Давайте проведём их, опираясь на базовые понятия линейной алгебры.

На рисунке 1 показано начало расчётного Mathcad-документа с двумя векторами X и Y, в которых хранятся декартовы координаты (абсциссы и ординаты) приближающегося к Земле астероида в пять разных моментов времени. На координатной плоскости отмечены соответствующие точки (синие крестики), начало координат совмещено с центром Земли (с центром окружности радиусом 6371 km). Космическое пространство, конечно, трёхмерное, но мы будем рассматривать нашу задачу на плоскости.

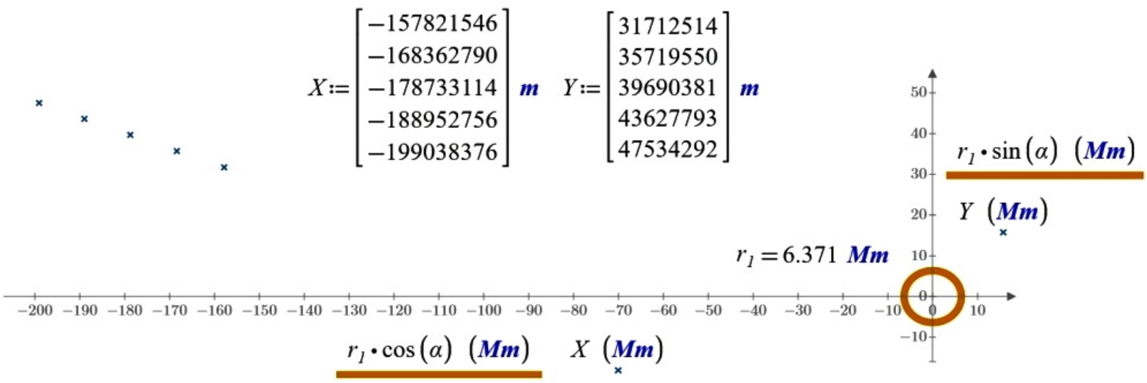


Рис. 1. Исходные данные задачи о полёте астероида к Земле

Два небесных тела, как известно из классической небесной механики [2], перемещаются относительно друг друга по траекториям, представляющим

3 Эта статья писалась в разгар пандемии коронавируса. Пользователи социальных сетей так комментировали сообщения о приближении к Земле астероидов: «Нам для полного счастья только астероида не хватало!»

собой *эллипс* (окружность в частном случае), *гиперболу* (одну из её ветвей) или в редких случаях *параболу*. Эти «космические» плоские кривые второго порядка называют также *коническими*: если круглый конус рассечь под разными углами плоскостью, то геометрическим местом точек, общих и для конуса, и для плоскости, будут эллипс (окружность), гипербола или парабола.

На рисунке 2 показано общее уравнение кривой второго порядка вместе с его аналитическим решением относительно переменной *y*. Полученные выражения (два корня квадратного уравнения), объединённые в вектор, будут ниже использованы для построения траектории астероида после нахождения численных значений коэффициентов, обозначенных буквой *a* с индексом или без индекса.

$$x^2 \cdot a_{x2} + 2\ x \cdot y \cdot a_{xy} + y^2 \cdot a_{y2} + 2\ x \cdot a_x + 2\ y \cdot a_y + a = 0 \xrightarrow{solve\,,\,y}$$

$$\to \begin{bmatrix} -\dfrac{a_y + \sqrt{{a_y}^2 + 2 \cdot a_y \cdot a_{xy} \cdot x + {a_{xy}}^2 \cdot x^2 - a_{x2} \cdot a_{y2} \cdot x^2 - 2 \cdot a_x \cdot a_{y2} \cdot x - a_{y2} \cdot a} + a_{xy} \cdot x}{a_{y2}} \\ -\dfrac{a_y - \sqrt{{a_y}^2 + 2 \cdot a_y \cdot a_{xy} \cdot x + {a_{xy}}^2 \cdot x^2 - a_{x2} \cdot a_{y2} \cdot x^2 - 2 \cdot a_x \cdot a_{y2} \cdot x - a_{y2} \cdot a} + a_{xy} \cdot x}{a_{y2}} \end{bmatrix}$$

Рис. 2. Решение уравнения плоской кривой второго порядка

Запись уравнения плоской кривой второго порядка на рисунке 2 не совсем традиционна. Обычно в учебниках и справочниках пишут так:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0.$$

В записи на рисунке 2, во-первых, используются более «говорящие» индексы у переменных *a* (*x*2 вместо 11, *y*2 вместо 22 и так далее), а во-вторых, в слагаемых переставлены местами сомножители. Это, конечно, никак не влияет на расчёт. Но у нас эта перестановка подчёркивает тот факт, что в рассматриваемой задаче величины *x* и *y* являются заданными константами (координатами астероида в различные моменты времени), а переменные a с индексами – неизвестными величинами, которые необходимо определить.

Если задать или подсчитать численные значения коэффициентов a_{x2}, a_{xy}, a_{y2}, a_x, a_y и a, входящих в уравнение плоской кривой второго порядка, то несложно построить саму кривую, используя два выражения, объединённые в вектор (см. рисунок 2). С другой стороны, известно, что для построения плоской кривой второго порядка нужно иметь минимум пять точек. Координаты этих точек у нас имеются (см. рисунок 1). Эти точки будут той «узенькой пяткой», по которой мы «дорисуем остальное» (см. первый эпиграф к статье), то есть траекторию полёта астероида.

Задача о кривой второго порядка, проходящей через пять точек, сводится к решению системы пяти линейных алгебраических уравнений с пятью неизвестными. Аббревиатура такой системы – СЛАУ. Казалось бы, что неизвестных должно быть шесть, а не пять – по числу коэффициентов уравнения плоской кривой второго порядка на рисунке 2. Но если иметь в системе шесть, а не пять уравнений, то она окажется *однородной*, то есть системой таких уравнений, у которых свободные члены равны нулю. Такая система имеет либо тривиальное решение (все неизвестные равны нулю), либо множество решений, что, конечно, нас не устраивает. Этот казус решается посредством присвоения a конкретного значения и нахождения значений остальных пяти коэффициентов: a_{x2}, …, a_y.

Поясним этот приём на более простом примере. Уравнение прямой имеет три коэффициента ($a_x x + a_y y + a = 0$), а провести её можно через две точки. Три, а не два коэффициента в уравнении учитывают тот факт, что прямая может быть параллельна оси ординат ($a_y = 0$) или оси абсцисс ($a_x = 0$). Для остальных случаев достаточно двух коэффициентов. Воспользуемся уравнением $y = a + bx$. Решение задачи сводится к поиску решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными a и b.

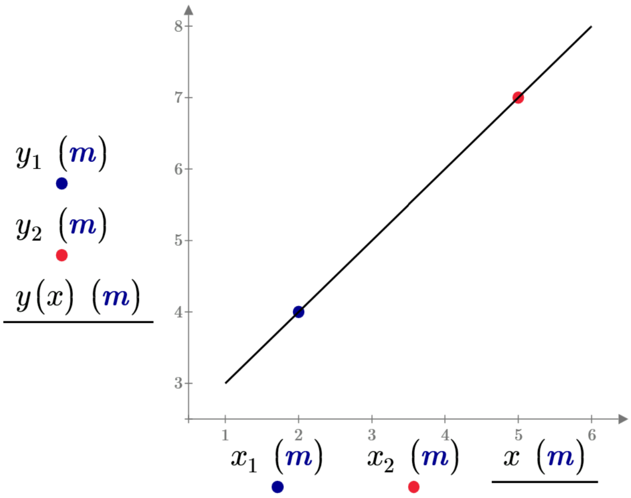
На рисунке 3 показаны три способа решение задачи о построении на плоскости прямой, проходящей через две заданные точки.

$x_1 := 2\ m \quad y_1 := 4\ m \quad x_2 := 5\ m \quad y_2 := 7\ m$

Метод 1

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} := \mathrm{line}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2\ m \\ 1 \end{bmatrix} \qquad y(x) := a + b \cdot x$$

$x := 1\ m, 1.01\ m .. 6\ m$



Метод 2

Решить

Начальные приближения

$a := 1\ m \qquad b := 1\ \frac{m}{m}$

Ограничения

$y_1 = a + b \cdot x_1 \qquad y_2 = a + b \cdot x_2$

Решатель

$$\mathrm{Find}(a, b) = \begin{bmatrix} 2\ m \\ 1 \end{bmatrix}$$

Метод 3

$$M \cdot x = v \qquad M := \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \qquad v := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$x := M^{-1} \cdot v = \begin{bmatrix} 2\ m \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{lsolve}(M, v) = \begin{bmatrix} 2\ m \\ 1 \end{bmatrix}$$

Рис. 3. Решение задачи о прямой, проходящей через две заданные точки

Первый способ – самый простой и самый необычный – это вызов встроенной в Mathcad функции line, возвращающей два коэффициента уравнения прямой $y = a + bx$. Аргументами функции line являются два вектора. В этих векторах, кстати говоря, может находиться не по два, а по три и более элементов. Если точек больше двух и не все из них лежат на искомой прямой, то решается задача линейной регрессии методом наименьших квадратов – прямая проводится вблизи точек так, чтобы сумма квадратов отклонений точек от прямой была минимальна.

Второй способ нахождения коэффициентов уравнения прямой $y = a + bx$ – решение двух алгебраических уравнений в блоке «Решить» с вызовом встроенной функции Find. Этот способ требует начальных приближений, хотя решение тут единственное. Но функция Find предназначена в первую очередь для решения систем нелинейных уравнений, не только алгебраических, но и показательных, логарифмических, тригонометрических и др. Такие системы могут иметь множество решений. Функция Find возвращает значение одного из решений в зависимости от первого приближения.

Третий способ основан на том, что система уравнений, записанная в блоке «Решить» (см. рисунок 3), линейная, следовательно, от блока «Решить» с его первым приближением можно отказаться. Создаётся квадратная матрица M коэффициентов при неизвестных системы двух линейных алгебраических уравнений и вектор свободных членов v. СЛАУ решается двумя способами: умножением инвертированной матрицы M коэффициентов при неизвестных на вектор свободных членов v либо вызовом встроенной в Mathcad функции lsolve. В этом случае необходимо проверить, что определитель матрицы M не равен нулю.

Но если две точки, через которые планируется провести прямую, разместить «строго по вертикали» ($x_1 = x_2$, см. рисунок 4), то все три способа, показанные на рисунке 3, окажутся неудачными. При этом и без подсчёта на компьютере сразу будет ясно, что определитель квадратной матрицы M, вводимой в расчёт вторым оператором предпоследней строки на рисунке 3, будет равен нулю при $x_1 = x_2$ $(1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 = 0)$.

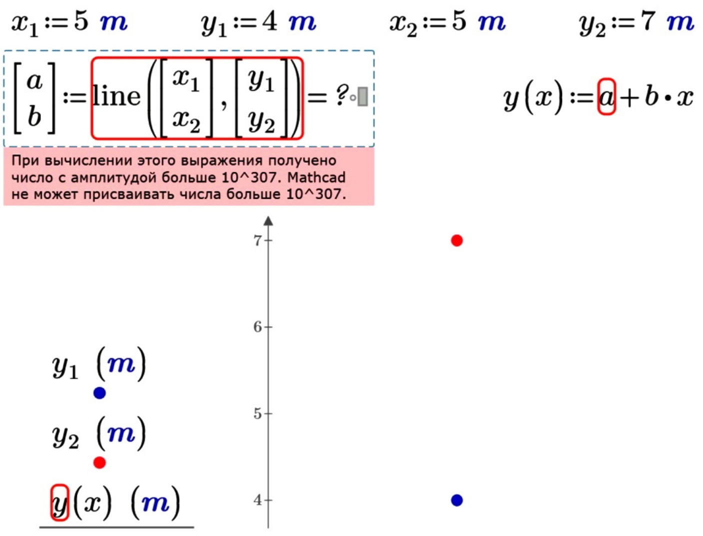


Рис. 4. Неудачная попытка решения задачи о прямой, проходящей через две данные точки

На рисунке 5 показан универсальный способ построения любых линий на плоскости: прямых и кривых, замкнутых и незамкнутых, одиночных и в семействе... К описанию этого способа подходит такая машиностроительная аналогия. Раньше, чтобы изготовить какую-либо деталь, нужно было сначала отливать её заготовку, а потом обрабатывать её на станках – токарных, сверлильных, фрезерных, строгальных и др. Сегодня многие такие детали изготавливаются на 3D-принтерах, которые «тупо» сканируют объём будущей детали и капают материал в «нужный момент в нужной точке».

Раньше, чтобы построить кривую на плоскости по её описанию, а не по формуле, приходилось искать её аналитическое выражение и работать с ним. Сегодня, в эру быстродействующих компьютеров, дисплеев и принтеров с высоким разрешением можно также «тупо» сканировать область графика и капать краску в том месте, где должна быть кривая. На рисунке 5 показано, как строится парабола и её директриса методом 2D-печати в прямоугольной области, ограниченной заданными значениями x_1, x_2, y_1, y_2.

$$\approx(a, b) := |a - b| < 0.01\ m \qquad ORIGIN = 0$$

$$x_f := 2.5\ m \qquad y_f := 2.5\ m \qquad n := 999$$

$$a_x \cdot x + a_y \cdot y + a = 0\ m \quad a_x := 1 \quad a_y := 0.5 \quad a := -5\ m$$

$$x_1 := -1\ m \quad y_1 := -1\ m \qquad x_2 := 5\ m \qquad y_2 := 5\ m$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} := \begin{array}{|l} i \leftarrow 0 \\ \text{for } x \in x_1, x_1 + \dfrac{x_2 - x_1}{n} .. x_2 \\ \quad \begin{array}{|l} \text{for } y \in y_1, y_1 + \dfrac{y_2 - y_1}{n} .. y_2 \\ \quad \begin{array}{|l} L_1 \leftarrow \sqrt{\left(x - x_f\right)^2 + \left(y - y_f\right)^2} \\ L_2 \leftarrow \dfrac{\left|a_x \cdot x + a_y \cdot y + a\right|}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2}} \\ \text{if } \approx\left(L_1, L_2\right) \vee \approx\left(\left(a_x \cdot x + a_y \cdot y + a\right), 0\ m\right) \\ \quad \begin{array}{|l} X_i \leftarrow x \\ Y_i \leftarrow y \\ i \leftarrow i + 1 \end{array} \end{array} \end{array} \\ \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \end{array}$$

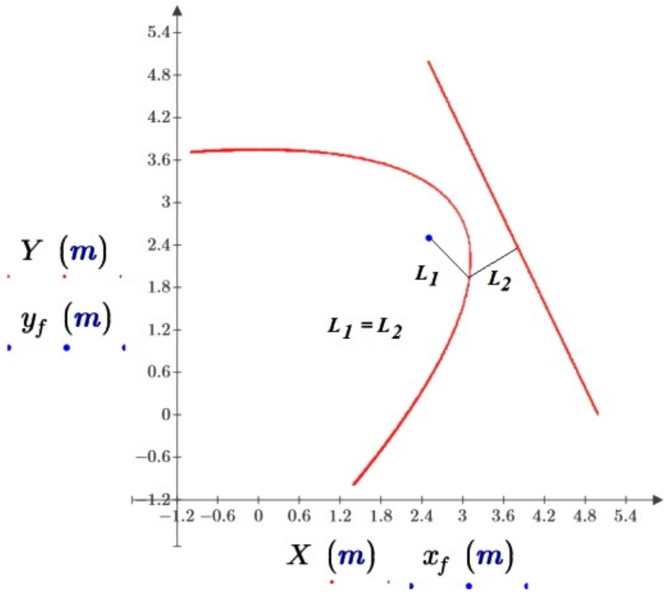


Рис. 5. Построение параболы и её директрисы сканированием плоской области (тонкие прямые линии и буквенные обозначения дорисованы в ручном режиме)

В расчёт вводится вспомогательная функция «примерно равно» (оператор «точно равно» тут по понятным причинам неприменим), а в двойном цикле с параметрами x и y формируются два вектора X и Y, хранящие значения «координат» будущей параболы и её директрисы. Построение основано на определении параболы как геометрического места точек, равноудаленных от заданной точки и заданной прямой (фокуса и директрисы параболы). Расстояния от точки параболы с координатами (x; y) до фокуса с координатами (x_f; y_f) и до директрисы $a_x x + a_y y + a = 0$ заносятся в переменные L_1 и L_2. Директриса также строится сканированием прямоугольной области. Для этого в программном блоке на рисунке 5 в операторе if добавлен оператор с символом ^ – логическое ИЛИ.

В определении эллипса фигурирует «сумма». Эллипс – это геометрическое место точек на плоскости, для которых сумма расстояний до двух заданных точек (фокусов эллипса) постоянна. В определении гиперболы фигурирует «разность». Гипербола – это геометрическое место точек на плоскости, для которых абсолютное значение разности расстояний до двух заданных точек (фокусов гиперболы) постоянно.

Если «сумму» или «разность» в этих определениях заменить «произведением» и «частным», получим две другие кривые: овал Кассини и окружность Аполлония. На рисунке 6 изображено семейство овалов Кассини, построенное нами описанным методом сканирования на плоскости (показано только ядро программы сканирования с вычислением расстояний L_1 и L_2). Было время, когда астрономы спорили о том, какую форму имеют орбиты спутников планет – эллипса или овала Кассини. Велись споры и о том, по какой траектории движутся кометы – по гиперболе или по дуге овала Кассини. На рисунке 7 показано семейство окружностей Аполлония, построенное с помощью метода сканирования и функции mod – «остаток от деления».

$\approx(a, b) := |a - b| < 0.01\ \boldsymbol{m}^2 \qquad ORIGIN = 0$

$x_{f1} := 2\ \boldsymbol{m} \qquad y_{f1} := 2\ \boldsymbol{m} \qquad x_{f2} := 5\ \boldsymbol{m} \qquad y_{f2} := 5\ \boldsymbol{m}$

$x_1 := -1\ \boldsymbol{m} \qquad y_1 := -1\ \boldsymbol{m} \qquad x_2 := 7\ \boldsymbol{m} \qquad y_2 := 7\ \boldsymbol{m} \qquad n := 1999$

$$L_1 \leftarrow \sqrt{\left(x - x_{f1}\right)^2 + \left(y - y_{f1}\right)^2}$$

$$L_2 \leftarrow \sqrt{\left(x - x_{f2}\right)^2 + \left(y - y_{f2}\right)^2}$$

$$\text{if} \approx\left(L_1 \cdot L_2, 4.4\ \boldsymbol{m}^2\right) \vee \approx\left(L_1 \cdot L_2, 7\ \boldsymbol{m}^2\right) \vee \approx\left(L_1 \cdot L_2, 11\ \boldsymbol{m}^2\right)$$

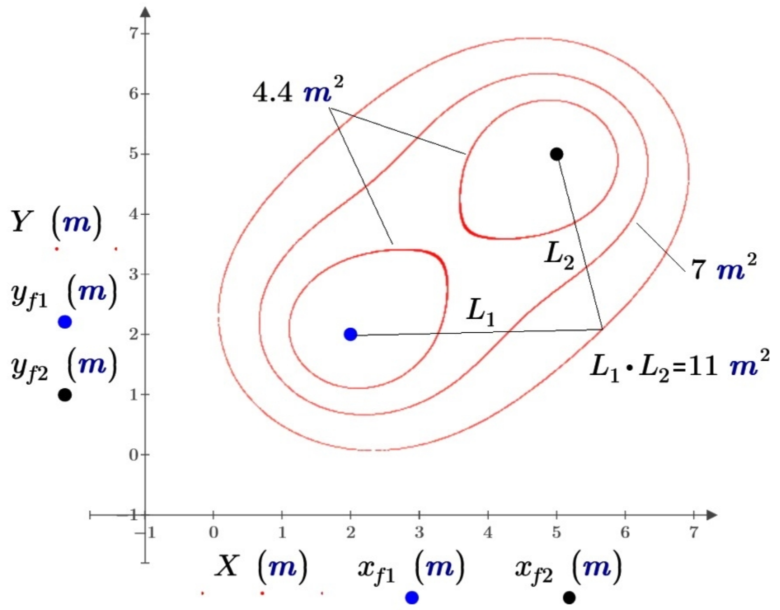


Рис. 6. Построение овалов Кассини сканированием плоской области (тонкие прямые линии и буквенные обозначения дорисованы в ручном режиме)

Но вернёмся к задаче об астероиде.

На рисунке 8 показано формирование квадратной матрицы коэффициентов при неизвестных M и вектора свободных членов v для традиционного матричного вида СЛАУ: $M \cdot x = v$. «Лишнему» коэффициенту a можно присвоить любое разумное значение. В нашей задаче ему присвоено значение радиуса Земли.

Далее был вычислен определитель матрицы, который оказался не равен нулю. Это, согласно теореме Крамера, означает, что наша СЛАУ, у которой число неизвестных равно числу уравнений, имеет единственное решение.

$$\approx(a,b) := |a-b| < 0.01\ m \qquad n := 3999$$

$$x_{f1} := 2\ m \qquad y_{f1} := 2\ m \qquad x_{f2} := 5\ m \qquad y_{f2} := 5\ m$$

$$x_1 := -1\ m \qquad y_1 := -1\ m \qquad x_2 := 8.9\ m \qquad y_2 := 8.9\ m$$

$$L_1 \leftarrow \sqrt{(x-x_{f1})^2 + (y-y_{f1})^2}$$
$$L_2 \leftarrow \sqrt{(x-x_{f2})^2 + (y-y_{f2})^2}$$
$$\text{if} \approx(\operatorname{mod}(L_1, L_2), a) \vee \approx(\operatorname{mod}(L_2, L_1), a)$$

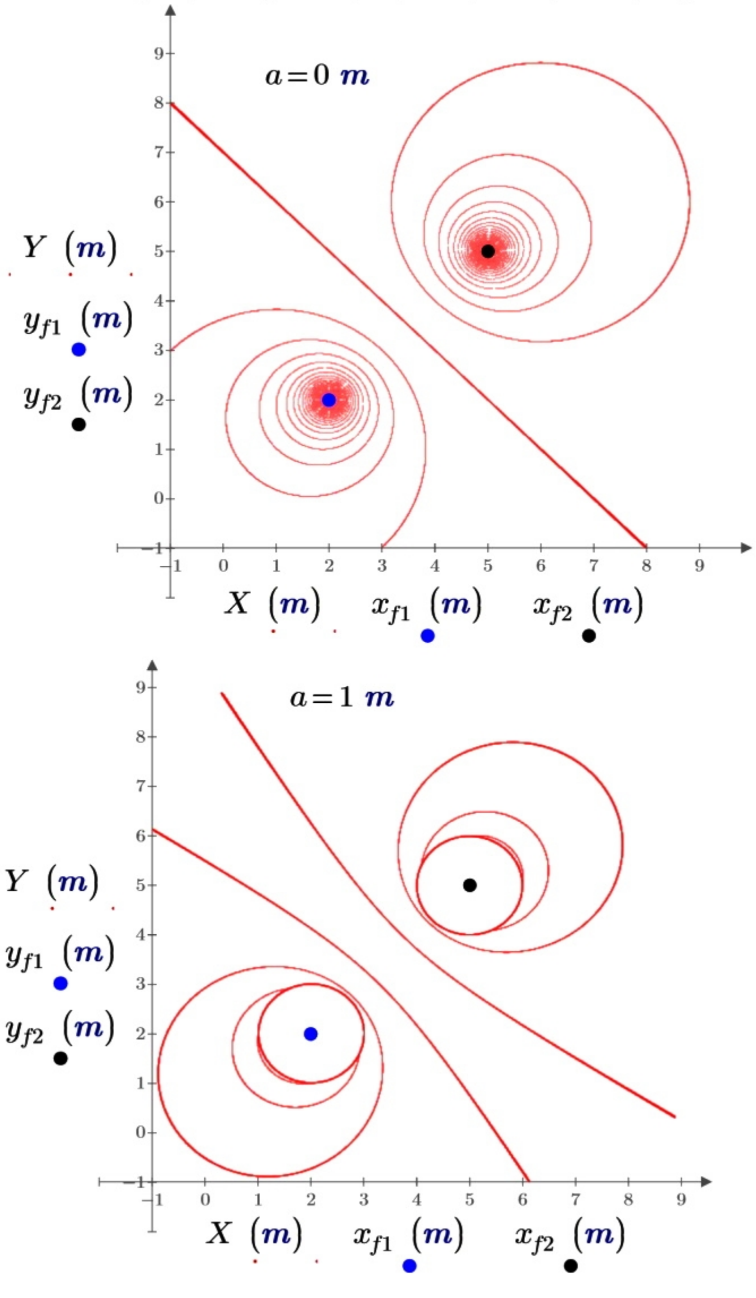


Рис. 7. Построение семейства окружностей Аполлония
(предельный случай окружности Аполлония – прямая)

Система решается двумя способами: умножением обратной матрицы на вектор свободных членов либо вызовом встроенной в Mathcad функции lsolve. Правильность решения проверяется вычитанием из матрицы M, умноженной на вектор решения, вектора свободных членов v. Оказалось, что второй способ более точен. С решением, полученным вторым способом, мы и будем работать дальше.

$$M := \begin{bmatrix} X_1^2 & 2\,X_1\,Y_1 & Y_1^2 & 2\,X_1 & 2\,Y_1 \\ X_2^2 & 2\,X_2\,Y_2 & Y_2^2 & 2\,X_2 & 2\,Y_2 \\ X_3^2 & 2\,X_3\,Y_3 & Y_3^2 & 2\,X_3 & 2\,Y_3 \\ X_4^2 & 2\,X_4\,Y_4 & Y_4^2 & 2\,X_4 & 2\,Y_4 \\ X_5^2 & 2\,X_5\,Y_5 & Y_5^2 & 2\,X_5 & 2\,Y_5 \end{bmatrix} \qquad a := r_1 \qquad v := \begin{bmatrix} -a \\ -a \\ -a \\ -a \\ -a \end{bmatrix}$$

$$\|M\| = 72.079\ \mathbf{Mm}^8$$

$$\begin{bmatrix} a_{x2} \\ a_{xy} \\ a_{y2} \\ a_x \\ a_y \end{bmatrix} := M^{-1} \cdot v \qquad M \cdot \begin{bmatrix} a_{x2} \\ a_{xy} \\ a_{y2} \\ a_x \\ a_y \end{bmatrix} - v = \begin{bmatrix} -0.009 \\ -0.01 \\ -0.011 \\ -0.012 \\ -0.013 \end{bmatrix} \mathbf{m}$$

$$\begin{bmatrix} a_{x2} \\ a_{xy} \\ a_{y2} \\ a_x \\ a_y \end{bmatrix} := \mathrm{lsolve}(M, v) \qquad M \cdot \begin{bmatrix} a_{x2} \\ a_{xy} \\ a_{y2} \\ a_x \\ a_y \end{bmatrix} - v = \begin{bmatrix} 1.118 \cdot 10^{-8} \\ 1.49 \cdot 10^{-8} \\ 7.451 \cdot 10^{-9} \\ 5.96 \cdot 10^{-8} \\ 3.725 \cdot 10^{-8} \end{bmatrix} \mathbf{m}$$

$$a_{x2} = -0.0088706\ \frac{1}{\mathbf{Mm}} \qquad a_x = -0.2548648$$

$$a_{xy} = -0.0121009\ \frac{1}{\mathbf{Mm}} \qquad a_y = 0.3023839$$

$$a_{y2} = -0.0063425\ \frac{1}{\mathbf{Mm}}$$

Рис. 8. Составление, анализ, решение и проверка решения системы пяти линейных алгебраических уравнений с пятью неизвестными

Коэффициенты a_{x2}, a_{xy}, a_{y2}, a_x, a_y и a определены, что даёт нам возможность построить траекторию астероида (см. рисунок 9). Ура! Астероид пролетит мимо Земли, и на него не нужно посылать команду бурильщиков с атомной бомбой!

$$y_1(x) := -\frac{a_y + \sqrt{a_y^{\,2} + 2 \cdot a_y \cdot a_{xy} \cdot x + a_{xy}^{\,2} \cdot x^2 - a_{x2} \cdot a_{y2} \cdot x^2 - 2 \cdot a_x \cdot a_{y2} \cdot x - a_{y2} \cdot a} + a_{xy} \cdot x}{a_{y2}}$$

$$y_2(x) := -\frac{a_y - \sqrt{a_y^{\,2} + 2 \cdot a_y \cdot a_{xy} \cdot x + a_{xy}^{\,2} \cdot x^2 - a_{x2} \cdot a_{y2} \cdot x^2 - 2 \cdot a_x \cdot a_{y2} \cdot x - a_{y2} \cdot a} + a_{xy} \cdot x}{a_{y2}}$$

$x := -200\ \boldsymbol{Mm}, -199.99\ \boldsymbol{Mm} .. 25\ \boldsymbol{Mm}$

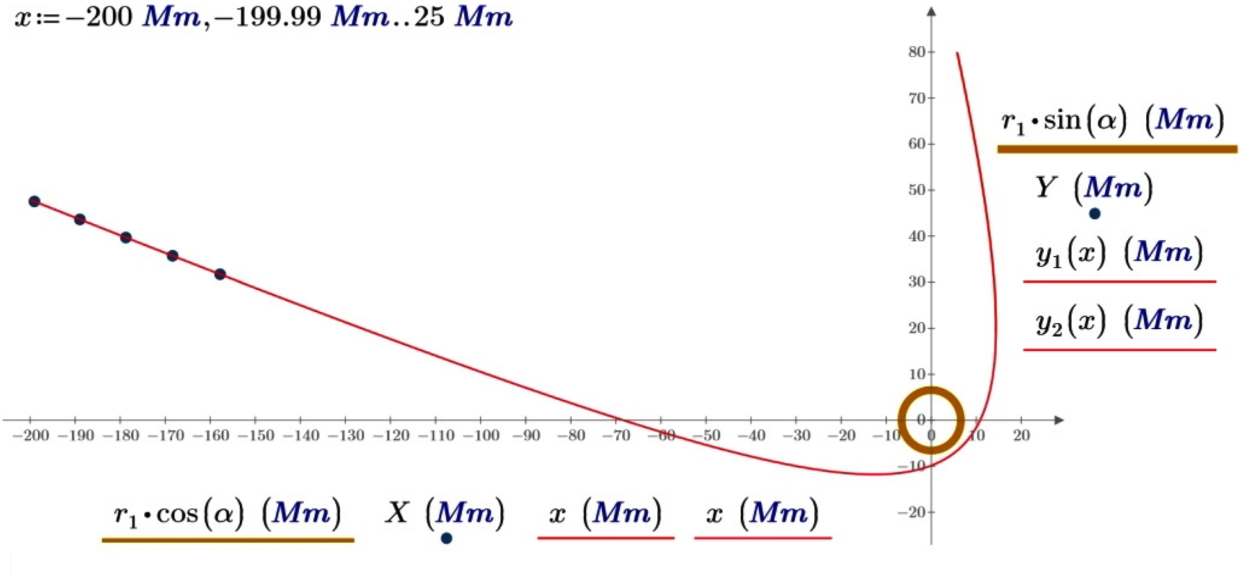
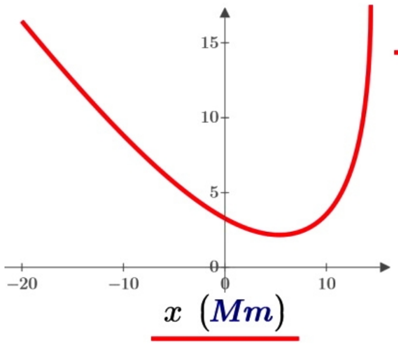


Рис. 9. Траектория пролёта астероида вблизи Земли,
рассчитанная по координатам пяти точек

Несложно подсчитать, на каком минимальном расстоянии от Земли пролетит астероид (см. рисунок 10). Для этого создаётся функция с именем Δ, возвращающая расстояние от поверхности Земли до астероида в зависимости от абсциссы астероида в принятой системе координат. С помощью встроенной в Mathcad функции Minimize определяется значение аргумента, при котором целевая функция достигает минимального значения. Астероид пролетит на минимальном расстоянии 2172 км от поверхности Земли. Вот это было бы зрелище! Голливуду тут делать нечего!

Скорость астероида тоже можно подсчитать, если учесть не только кинематику, но и динамику его полёта. Но это тема отдельного численного эксперимента [1, 2].

$$\Delta(x) := \sqrt{y_2(x)^2 + x^2} - r_1$$



$\Delta(x)$ (Mm)

$$x := 10\ Mm$$

$$x := \mathrm{Minimize}(\Delta, x)$$

$$\Delta(x) = 2172\ km$$

Рис. 10. Расчёт расстояния от Земли
до пролетающего мимо неё астероида

А какую кривую мы построили на рисунке 9? Что это: парабола, гипербола или дуга эллипса? Ответить на этот вопрос можно, если вычислить значение одной из *инвариант* кривой второго порядка (см. рисунок 11). Она оказалась отрицательной, значит, мы построили одну из ветвей гиперболы. Для эллипса эта инварианта положительна, а для параболы равна нулю.

$$\left|\begin{bmatrix} a_{x2} & a_{xy} \\ a_{xy} & a_{y2} \end{bmatrix}\right| = -9.017 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{Mm^2}$$

Рис. 11. Инварианта построенной кривой второго порядка

Функция lsolve была встроена в пакет Mathcad не сразу. Вначале решать СЛАУ можно было только одним способом: путём умножения инвертированной матрицы коэффициентов при неизвестных на вектор свободных членов (см. рисунки 3 и 8). Функция lsolve была введена и для того, чтобы можно было решать *переопределённые* и *недоопределённые* СЛАУ – системы уравнений, где число неизвестных не равно числу уравнений и, следовательно, матрица коэффициентов при неизвестных неквадратная, а у такой матрицы нельзя найти определитель, её невозможно инвертировать – найти обратную матрицу.

Если в двух векторах X и Y будут храниться координаты (абсциссы и ординаты) приближающегося к Земле астероида, соответствующие не пяти, а семи разным моментам времени (рис. 12), то мы будем иметь дело уже с переопределённой СЛАУ, где число уравнений больше числа неизвестных.

$$X := \begin{bmatrix} -124887861 \\ -157821546 \\ -168362790 \\ -178733114 \\ -188952756 \\ -199038376 \\ -209003876 \end{bmatrix} \boldsymbol{m} \quad Y := \begin{bmatrix} 19442116 \\ 31712514 \\ 35719550 \\ 39690381 \\ 43627793 \\ 47534292 \\ 51412127 \end{bmatrix} \boldsymbol{m}$$

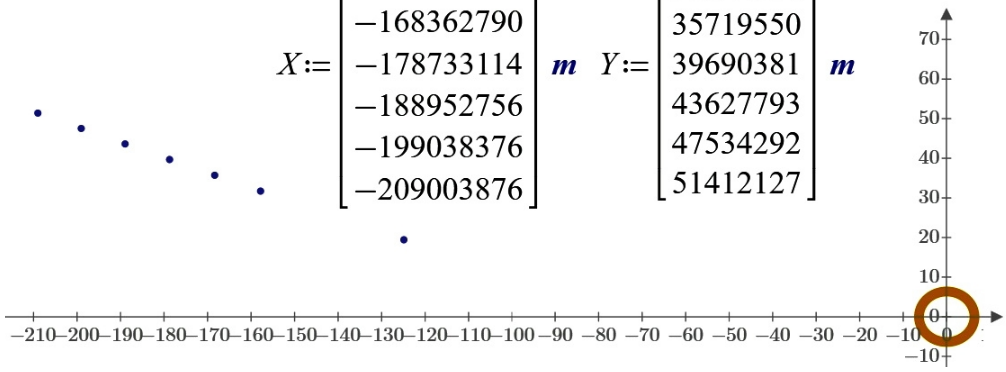


Рис. 12. Дополненные исходные данные задачи
о полёте астероида к Земле

На рисунке 13 показано формирование прямоугольной матрицы коэффициентов при неизвестных M и вектора свободных членов v опять же для традиционного матричного вида СЛАУ: $M \cdot x = v$. Для анализа данной системы уже нельзя применить теорему Крамера. Для анализа таких систем нужно использовать основную теорему линейной алгебры – теорему Кронекера – Капелли, гласящую, что любая СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда ранг её основной матрицы равен рангу её расширенной матрицы, причём система имеет единственное решение, если ранг равен числу неизвестных, и бесконечное число решений, если ранг меньше числа неизвестных. Если же в СЛАУ число неизвестных равно числу уравнений, то можно ограничиться теоремой Крамера.

На рисунке 13 показано, как после формирования неквадратной матрицы ведётся вычисление рангов основной и расширенной матриц. Встроенная в Mathcad функция rank может работать только с безразмерными матрицами, но у нас они размерные. Выход из положения – вызов встроенной функции с именем SIUnitsOf, которая возвращает базовую единицу SI своего аргумента. Поэлементное деление значений в матрице или в векторе на эту функцию (операция векторизации, на рисунке 13 обозначена с помощью стрелки над аргументом) «обезразмеривает» матрицу (вектор). Функция augment «склеивает» по горизонтали матрицу и вектор, возвращая расширенную матрицу.

$$M := \begin{bmatrix} X_1^{\,2} & 2\,X_1\,Y_1 & Y_1^{\,2} & 2\,X_1 & 2\,Y_1 \\ X_2^{\,2} & 2\,X_2\,Y_2 & Y_2^{\,2} & 2\,X_2 & 2\,Y_2 \\ X_3^{\,2} & 2\,X_3\,Y_3 & Y_3^{\,2} & 2\,X_3 & 2\,Y_3 \\ X_4^{\,2} & 2\,X_4\,Y_4 & Y_4^{\,2} & 2\,X_4 & 2\,Y_4 \\ X_5^{\,2} & 2\,X_5\,Y_5 & Y_5^{\,2} & 2\,X_5 & 2\,Y_5 \\ X_6^{\,2} & 2\,X_6\,Y_6 & Y_6^{\,2} & 2\,X_6 & 2\,Y_6 \\ X_7^{\,2} & 2\,X_7\,Y_7 & Y_7^{\,2} & 2\,X_7 & 2\,Y_7 \end{bmatrix} \qquad a := r_1 \qquad v := \begin{bmatrix} -a \\ -a \\ -a \\ -a \\ -a \\ -a \\ -a \end{bmatrix}$$

$$M_0 := \overrightarrow{\frac{M}{\mathrm{SIUnitsOf}(M)}} \qquad v_0 := \overrightarrow{\frac{v}{\mathrm{SIUnitsOf}(v)}}$$

$$\mathrm{cols}(M) = 5 \quad \mathrm{rank}(M_0) = 5 \quad \mathrm{rank}(\mathrm{augment}(M_0, v_0)) = 5$$

$$\begin{bmatrix} a_{x2} \\ a_{xy} \\ a_{y2} \\ a_x \\ a_y \end{bmatrix} := \mathrm{lsolve}(M, v) \qquad M \cdot \begin{bmatrix} a_{x2} \\ a_{xy} \\ a_{y2} \\ a_x \\ a_y \end{bmatrix} - v = \begin{bmatrix} 0.017 \\ -0.569 \\ 1.33 \\ -0.557 \\ -1.095 \\ 1.251 \\ -0.376 \end{bmatrix} \boldsymbol{m}$$

$$a_{x2} = -0.0095849\ \frac{1}{\boldsymbol{Mm}} \qquad a_x = -0.2806775$$

$$a_{xy} = -0.0132117\ \frac{1}{\boldsymbol{Mm}} \qquad a_y = 0.3009535$$

$$a_{y2} = -0.0075199\ \frac{1}{\boldsymbol{Mm}}$$

Рис. 13. Формирование, анализ, решение
и проверка решения переопределённой СЛАУ

Наша система семи уравнений с пятью неизвестными имеет единственное решение, которое получено с использованием функции lsolve. Решение, показанное на рисунке 13, несколько отличается от решения, показанного на рисунке 8. Это связано с тем, что мы используем приближённые методы решения задачи. Но гипербола, построенная по коэффициентам, указанным на рисунке 8, будет практически совпадать с гиперболой, построенной по коэффициентам, указанным на рисунке 13.

На рисунке 14 показаны исходные данные, сводящиеся к решению недоопределённой СЛАУ. Удалось, увы, определить координаты астероида только в четыре различных момента времени. Анализ, решение и проверка решения такой СЛАУ приведены на рисунке 15. Ранги основной и расширенной матриц системы равны четырём, а число неизвестных – пяти. Согласно теореме Кронекера – Капелли, такая СЛАУ имеет бесконечное число решений, на рисунке 15 показано одно из них. А как получить другие решения? Тут нужно будет обратиться к функции Find, с которой мы уже работали.

$$X := \begin{bmatrix} -157821546 \\ -168362790 \\ -178733114 \\ -188952756 \end{bmatrix} m \quad Y := \begin{bmatrix} 31712514 \\ 35719550 \\ 39690381 \\ 43627793 \end{bmatrix} m$$

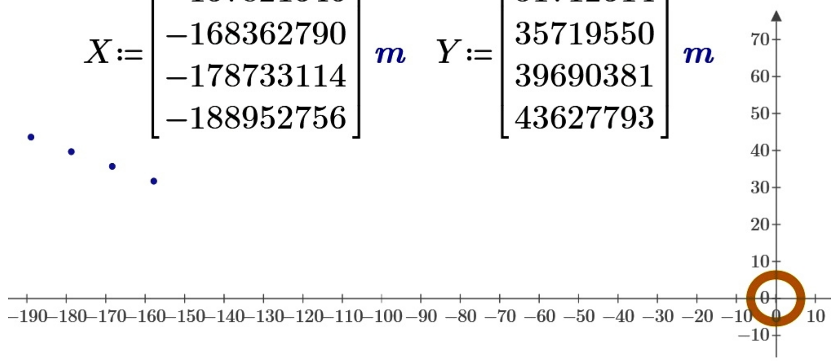


Рис. 14. Урезанные исходные данные задачи о полёте астероида к Земле

На рисунке 16 показано решение СЛАУ в блоке «Решить», требующее начального приближения. Если менять это приближение, умножить, например, на какое-нибудь число коэффициент a_x, то будут выдаваться новые решения, три из них отображены графически на рисунке 17.

$$M := \begin{bmatrix} {X_1}^2 & 2\,X_1\,Y_1 & {Y_1}^2 & 2\,X_1 & 2\,Y_1 \\ {X_2}^2 & 2\,X_2\,Y_2 & {Y_2}^2 & 2\,X_2 & 2\,Y_2 \\ {X_3}^2 & 2\,X_3\,Y_3 & {Y_3}^2 & 2\,X_3 & 2\,Y_3 \\ {X_4}^2 & 2\,X_4\,Y_4 & {Y_4}^2 & 2\,X_4 & 2\,Y_4 \end{bmatrix} \qquad a := r_1 \qquad v := \begin{bmatrix} -a \\ -a \\ -a \\ -a \end{bmatrix}$$

$$M_0 := \overrightarrow{\frac{M}{\mathrm{SIUnitsOf}(M)}} \qquad v_0 := \overrightarrow{\frac{v}{\mathrm{SIUnitsOf}(v)}}$$

$$\mathrm{cols}(M) = 5 \qquad \mathrm{rank}(M_0) = 4 \qquad \mathrm{rank}(\mathrm{augment}(M_0, v_0)) = 4$$

$$\begin{bmatrix} a_{x2} \\ a_{xy} \\ a_{y2} \\ a_x \\ a_y \end{bmatrix} := \mathrm{lsolve}(M, v) \qquad M \cdot \begin{bmatrix} a_{x2} \\ a_{xy} \\ a_{y2} \\ a_x \\ a_y \end{bmatrix} - v = \begin{bmatrix} 9.313 \cdot 10^{-9} \\ 3.725 \cdot 10^{-9} \\ 7.451 \cdot 10^{-9} \\ -3.725 \cdot 10^{-9} \end{bmatrix} \boldsymbol{m}$$

$$a_{x2} = 0.0000882\ \frac{1}{\boldsymbol{Mm}} \qquad a_x = 0.0493125$$

$$a_{xy} = 0.0013815\ \frac{1}{\boldsymbol{Mm}} \qquad a_y = 0.2294844$$

$$a_{y2} = 0.0062361\ \frac{1}{\boldsymbol{Mm}}$$

Рис. 15. Формирование, анализ, решение и проверка решения недоопределённой СЛАУ

Решить

Начальные приближения

$$x := \begin{bmatrix} a_{x2} \\ a_{xy} \\ a_{y2} \\ a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

Ограничения

$$M \cdot x = v$$

Решатель

$$\begin{bmatrix} a_{x2} \\ a_{xy} \\ a_{y2} \\ a_x \\ a_y \end{bmatrix} := \mathbf{Find}(\mathbf{x})$$

Рис. 16. Решение недоопределённой СЛАУ с заданием первого приближения к решению

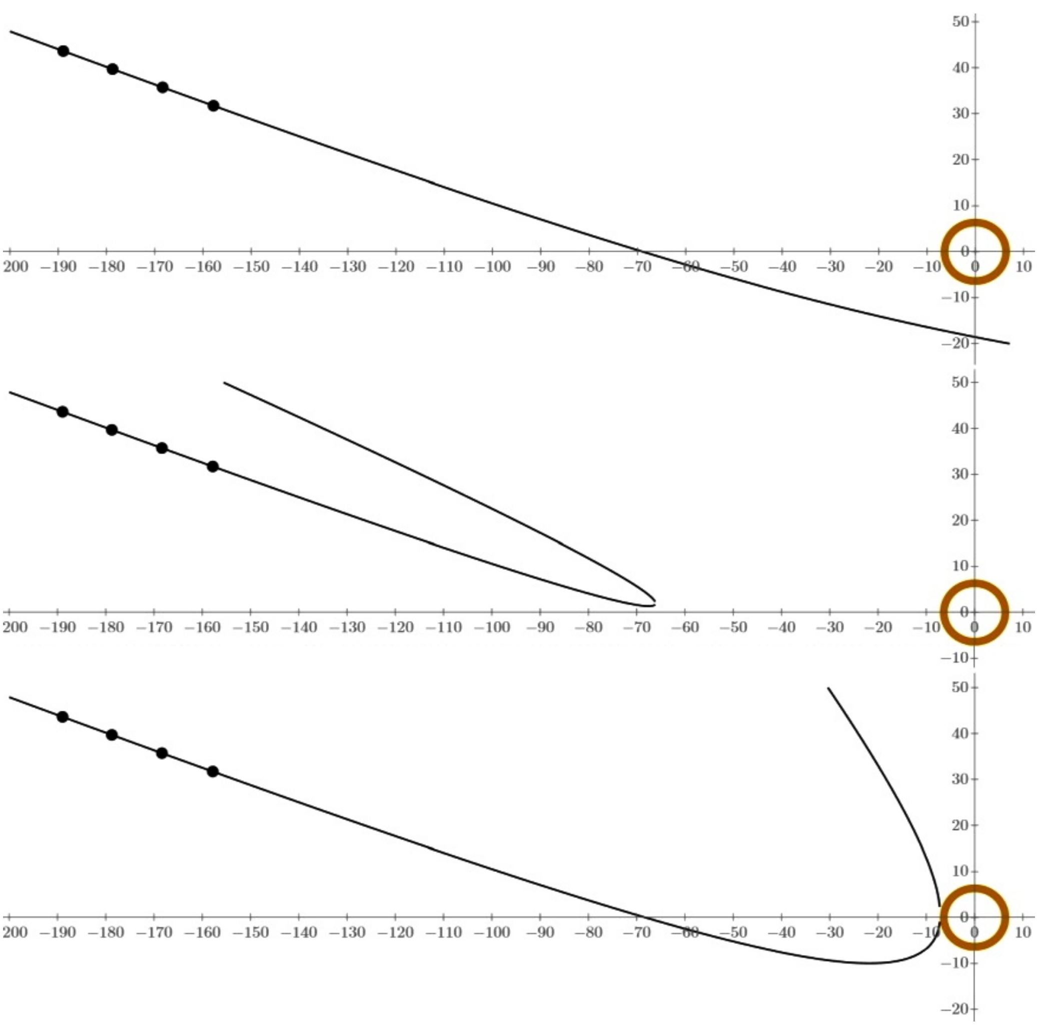


Рис. 17. Графическое отображение трёх решений недоопределённой СЛАУ при разных начальных приближениях

$$X := \mathrm{Round}(X, 10\,m) = \begin{bmatrix} -157821550 \\ -168362790 \\ -178733110 \\ -188952760 \\ -199038380 \end{bmatrix} m \qquad Y := \mathrm{Round}(Y, 10\,m) = \begin{bmatrix} 31712510 \\ 35719550 \\ 39690380 \\ 43627790 \\ 47534290 \end{bmatrix} m$$

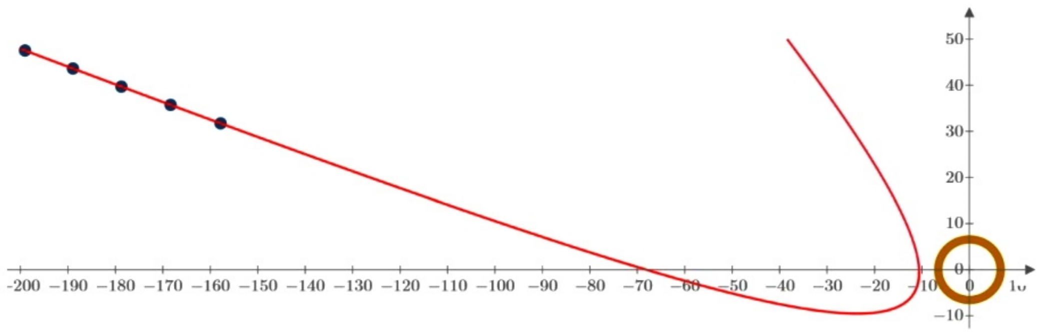


Рис. 18. Неправильно рассчитанная траектория полёта астероида

Векторы X и Y на рисунках 1, 12 и 14 хранят координаты астероида с точностью до 1 м. Но в практике зондирования космоса, даже ближнего, такой точности достичь вряд ли удастся. Если, например, значения в векторах X и Y (см. рисунок 1) округлить до 10 м (используем функцию Round, см. рисунок 18), то рассчитанная траектория астероида станет качественно другой: астероид перед Землёй развернётся и полетит назад, а это явно противоречит «физике задачи».

Исходные данные задачи об астероиде таковы, что приходится балансировать на краю некой пропасти, куда численные методы решения могут «сорваться». Вот конкретный пример. Решая СЛАУ, где число неизвестных равно числу уравнений (см. рисунок 8), мы проверили, не равен ли нулю определитель квадратной матрицы M, и с помощью теоремы Крамера убедились в единственности решения. Однако не будет лишним, если мы подключим к этой проверке и теорему Кронекера – Капелли (см. рисунок 19). Согласно этой теореме, при численном определении рангов матриц (оператор =) окажется, что данная СЛАУ должна иметь бесконечное число решений. Но если к вычислению рангов матриц применить не численную, а символьную математику (оператор →), то всё встанет на свои места.

$$M:=\begin{bmatrix} {X_1}^2 & 2\,X_1\,Y_1 & {Y_1}^2 & 2\,X_1 & 2\,Y_1 \\ {X_2}^2 & 2\,X_2\,Y_2 & {Y_2}^2 & 2\,X_2 & 2\,Y_2 \\ {X_3}^2 & 2\,X_3\,Y_3 & {Y_3}^2 & 2\,X_3 & 2\,Y_3 \\ {X_4}^2 & 2\,X_4\,Y_4 & {Y_4}^2 & 2\,X_4 & 2\,Y_4 \\ {X_5}^2 & 2\,X_5\,Y_5 & {Y_5}^2 & 2\,X_5 & 2\,Y_5 \end{bmatrix} \qquad a:=r_1 \qquad v:=\begin{bmatrix} -a \\ -a \\ -a \\ -a \\ -a \end{bmatrix}$$

$$\|M\| = 72.079\ \mathbf{Mm}^8$$

$$\mathrm{cols}(M)=5 \quad \mathrm{rank}(M_0)=4 \quad \mathrm{rank}(\mathrm{augment}(M_0, v_0))=4$$

$$\mathrm{rank}(M_0) \rightarrow 5 \quad \mathrm{rank}(\mathrm{augment}(M_0, v_0)) \rightarrow 5$$

Рис. 19. Приложение теоремы Кронекера – Капелли к СЛАУ
с числом неизвестных, равным числу уравнений

Рассмотренная в статье задача входит в коллекцию авторских задач для обучения по технологии STEM (Science, Technology, Engineering and Math, including Computing Science), собранных в пособии [4].

Источники

1. *Очков В.Ф.*, *Боголомова Е.П.*, *Иванов Д.А.*, *Писачич К.* Движения планет: расчёт и визуализация в среде Mathcad или Часы Кеплера // Cloud of Science. – 2015. – Т. 2. – № 2. – С. 177–215.

См. http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Planets.pdf.

2. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. – М.: Наука, 1968.

3. *Мальцев И.А.* Основы линейной алгебры. – Изд. 3-е, перераб. – М.: Наука, 1970.

См. http://mat.net.ua/mat/Malcev-Algebra.htm.

4. *Очков В.Ф.*, *Боголомова Е.П.*, *Иванов Д.А.* Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет: Учебное пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб.: Лань, 2018.

См. http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/T-2018/PhysMathStudies.pdf.