

Глава 8. Процессы течения газов и жидкостей

8.1. Основные уравнения процессов течения

8.2. Скорость звука

8.3. Истечение из суживающихся сопл.

8.4. Переход через скорость звука. Сопло Лавалья

8.5. Адиабатное течение с трением

8.6. Общие закономерности течения. Закон обращения
воздействий

8.7. Температура адиабатного торможения

ПРОЦЕССЫ ТЕЧЕНИЯ ГАЗОВ И ЖИДКОСТЕЙ

к оглавлению Главы 8

8.1. Основные уравнения процессов течения

В гл. 2 было сформулировано уравнение первого закона термодинамики для потока, имеющее следующий вид [см. формулу (2.77)]:

$$q_{1-2} = (h_2 - h_1) + \frac{(w_2^2 - w_1^2)}{2} + g(z_2 - z_1) + l_{\text{техн}} + l_{\text{тр}},$$

или в дифференциальной форме [см. (2.78)]

$$dq = dh + wdw + gdz + dl_{\text{техн}} + dl_{\text{тр}}.$$

С учетом того, что подводимая к потоку теплота q складывается из теплоты $q_{\text{внеш}}$, поступающей извне, и теплоты трения $q_{\text{тр}}$

$$q = q_{\text{внеш}} + q_{\text{тр}},$$

приведенные уравнения могут быть представлены в следующем виде:

$$q_{\text{внеш } 1-2} = (h_2 - h_1) + \frac{(w_2^2 - w_1^2)}{2} + g(z_2 - z_1) + l_{\text{техн}} \quad (8.1)$$

и (2.81б):

$$dq_{\text{внеш}} = dh + wdw + gdz + dl_{\text{техн}}.$$

Эти уравнения справедливы и при наличии, и при отсутствии вязкого трения на стенках канала.

Если рассматриваемый участок потока находится на одном геометрическом уровне, то $dz = 0$; если поток не производит технической работы и эта работа не подводится к нему, $dl_{\text{техн}} = 0$. Именно этот частный случай движения потока мы будем рассматривать в настоящем параграфе. Очевидно, что для этого случая уравнение (2.81б) приобретает следующий вид:

$$dq_{\text{внеш}} = dh + wdw. \quad (8.2)$$

Это уравнение показывает, что теплота $q_{\text{внеш}}$, подводимая к потоку или отводимая от него, расходуется на изменение энтальпии жидкости или газа h и на изменение скорости движения жидкости или газа w .

Для подавляющего большинства технически важных задач наибольший интерес представляет рассмотрение случая адиабатного течения, т.е. течения без подвода теплоты извне и отвода ее. Поэтому всюду ниже мы будем рассматривать в основном только адиабатное течение.

В дальнейшем мы будем изучать закономерности обратимого адиабатного потока, т.е. течения без трения (или, как говорят, *идеального течения*), а затем рассмотрим вопрос об учете необратимости потока, обусловленной трением.

Представление о течении без трения, разумеется, является идеализацией свойств жидкости, ибо все жидкости обладают большей или меньшей вязкостью. Поэтому *абсолютно невязкую жидкость принято называть идеальной*. Представление об идеальной жидкости оказывается весьма полезным при анализе процессов течения.

Для адиабатного потока ($dq_{\text{внеш}} = 0$) уравнение (8.2) можно записать в виде

$$dh + wdw = 0. \quad (8.3)$$

Из (8.3) видно, что если адиабатный поток ускоряется ($dw > 0$), то его энтальпия уменьшается ($dh < 0$), и наоборот. Иными словами, ускорение адиабатного потока происходит за счет уменьшения его энтальпии.

Рассмотрим один практически важный случай обратимого (т.е. при отсутствии трения) адиабатного течения. Уравнение первого закона термодинамики для потока запишем в виде

$$q_{1-2} = (u_2 - u_1) + (p_2 v_2 - p_1 v_1) + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + l_{\text{техн}} + l_{\text{тр}},$$

или, что то же самое, с учетом (2.79) — в виде

$$q_{\text{внеш } 1-2} = (u_2 - u_1) + (p_2 v_2 - p_1 v_1) + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + l_{\text{техн}}. \quad (8.4)$$

Для адиабатного течения ($q_{\text{внеш } 1-2} = 0$) при отсутствии технической работы ($l_{\text{техн}} = 0$) получаем:

$$u_1 + p_1 v_1 + \frac{w_1^2}{2} + g z_1 = u_2 + p_2 v_2 + \frac{w_2^2}{2} + g z_2. \quad (8.5)$$

Если жидкость несжимаема, то $v_1 = v_2 = v$ и $dv = 0$.

Из общего уравнения первого закона термодинамики (2.36)

$$dq = du + pdv$$

следует, что для обратимого адиабатного течения (когда не только $q_{\text{внеш}} = 0$, но и $q_{\text{тр}} = 0$ и, следовательно, $q = 0$)

$$pdv = -du. \quad (8.6)$$

Отсюда следует, что для несжимаемой жидкости $du = 0$, т.е. $u_1 = u_2$, и уравнение (8.5) приобретает вид:

$$p_1 v + \frac{w_1^2}{2} + g z_1 = p_2 v + \frac{w_2^2}{2} + g z_2. \quad (8.7)$$

С учетом того, что $v = 1/\rho$, где ρ — плотность, получаем:

$$p_1 + \frac{\rho w_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho w_2^2}{2} + \rho g z_2. \quad (8.7a)$$

Уравнение (8.7a), представляющее собой запись первого закона термодинамики для обратимого адиабатного потока несжимаемой жидкости, носит название *уравнения Бернулли*. Это уравнение давно известно в гидродинамике, где оно выводится из законов Ньютона. Уравнение Бернулли имеет большое практическое значение, так как все жидкости при невысоких давлениях (а в некоторых случаях и газы) можно считать практически несжимаемыми.

Если $z_1 = z_2$, то уравнение (8.7a) может быть записано следующим образом:

$$p_1 + \frac{\rho w_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho w_2^2}{2}. \quad (8.7б)$$

Комплекс $\frac{\rho w^2}{2}$ носит название *динамического давления (напора)* в отличие от величины p , называемой иногда *статическим* давлением. Сумму статического и динамического давлений называют *полным давлением*. Уравнение (8.7б) показывает, что в обратимом адиабатном потоке несжимаемой¹⁾ жидкости при $h = \text{const}$ полное давление постоянно по длине потока. Статическое давление — это давление, которое показывает манометр, движущийся вместе с потоком. При торможении потока ($w = 0$) статическое давление становится равным полному давлению.

¹⁾ Если разница между p_1 и p_2 не слишком велика, так что значения v_1 и v_2 близки между собой, то уравнение (8.7б) можно с известным приближением применять и для сжимаемой среды. Тогда ρ — это средняя плотность жидкости в рассматриваемом интервале статических давлений.

Интегрируя уравнение (8.3) между двумя точками потока, получаем:

$$h_1 - h_2 = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}, \quad (8.8)$$

откуда

$$w_2 = \sqrt{2(h_1 - h_2) + w_1^2}. \quad (8.9)$$

Уравнение (8.9) показывает, как определить скорость адиабатного потока в точке 2 (рис. 8.1), если известна скорость в точке 1 и разность (или, как иногда говорят, перепад) энтальпий в точках 1 и 2. Так же как и исходное уравнение (8.3), это уравнение справедливо и для обратимого адиабатного течения, и для адиабатного течения с трением.

Для нахождения перепада энтальпий $h_1 - h_2$ очень удобно пользоваться h, s -диаграммой¹⁾. Зная параметры состояния газа (жидкости) в точке 1 и хотя бы один параметр в точке 2 (например, давление p_2), нетрудно найти значение h_2 : если рассматривается обратимый адиабатный поток, то очевидно, что точки 1 и 2 лежат на изоэнтропе $s = \text{const}$, которая в h, s -диаграмме изображается вертикальной прямой. Пересечение изоэнтропы $s = \text{const}$ с изобарой $p_2 = \text{const}$ дает точку 2 (см. рис. 8.1).

К решению задачи об определении скорости потока в точке 2 по известным значениям термических параметров состояния и скорости в точке 1 и давления в точке 2 можно подойти и другим путем.

Напомним, что, как показано в гл. 2, для течения²⁾ без трения при $l_{\text{техн}} = 0$ и $dz = 0$ справедливо уравнение (2.86)

$$w dw = -v dp.$$

Из этого уравнения следует, что если давление по движению потока падает ($dp < 0$), то скорость потока возрастает ($dw > 0$), и наоборот. Интегрируя уравнение (2.86), имеем:

$$\frac{w_2^2}{2} - \frac{w_1^2}{2} = - \int_{p_1}^{p_2} v dp, \quad (8.10)$$

или, что то же самое,

$$\frac{w_2^2}{2} - \frac{w_1^2}{2} = \int_{p_2}^{p_1} v dp. \quad (8.10a)$$

Отсюда

$$w_2 = \sqrt{2 \int_{p_2}^{p_1} v dp + w_1^2}. \quad (8.11)$$

Уравнение (8.11), так же как и уравнение (8.9), позволяет определить скорость потока в точке 2 по известной скорости в точке 1, если известно значение

¹⁾ h, s -диаграмма была предложена Р. Молье главным образом для упрощения расчетов перепада энтальпий при расчете паровых турбин и других аппаратов.

²⁾ Не только адиабатного, но и любого другого.

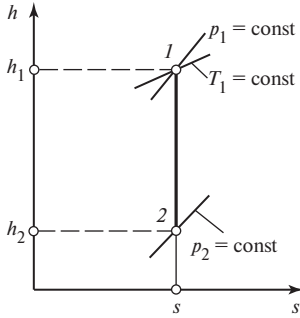


Рис. 8.1

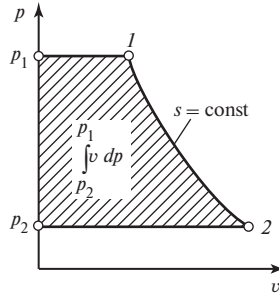


Рис. 8.2

интеграла $\int_{p_2}^{p_1} v dp$. Следует подчеркнуть, что уравнение (8.11) в общем виде справедливо не только для обратимого адиабатного течения, но и для любого другого течения без трения; в самом деле, это уравнение получено из соотношения (2.86), при выводе которого не делалось каких-либо предположений о характере процесса, за исключением предположения об отсутствии трения (в частности, мы не считали, что $dq_{\text{внеш}} = 0$). Что же касается индивидуальных особенностей того или иного процесса течения, то они будут использоваться

при вычислении интеграла $\int_{p_2}^{p_1} v dp$ для различных процессов, например изотер-

мического, политропного и т.д. Характер зависимости $v(p)$ будет различным, и, следовательно, различными будут значения этого интеграла. В частности, для интересующего нас случая обратимого адиабатного течения точки 1 и 2 лежат на изоэнтропе, и этот интеграл представляет собой площадь в p, v -диаграмме, ограниченную изоэнтропой и изобарами p_1 и p_2 (рис. 8.2).

Для реальных газов и жидкостей этот интеграл вычисляется по экспериментальным p, v, T -данным численными методами, а для идеальных газов — по уравнению адиабаты.

Относительно величины $\int_{p_2}^{p_1} v dp$ необходимо сказать следующее. Величина работы, расходуемой на увеличение кинетической энергии потока [без трения, при $dz = 0$ и $dI_{\text{техн}} = 0$, см. (8.10а)],

$$\frac{w_2^2}{2} - \frac{w_1^2}{2} = \int_{p_2}^{p_1} v dp,$$

представляет собой разность работы расширения потока $\int_{v_1}^{v_2} p dv$ и работы проталкивания $(p_2 v_2 - p_1 v_1)$.

В самом деле, из соотношения

$$v dp = d(pv) - p dv$$

следует, что

$$\int_{p_1}^{p_2} v dp = (p_2 v_2 - p_1 v_1) - \int_{v_1}^{v_2} p dv, \quad (8.12)$$

откуда

$$\int_{p_2}^{p_1} v dp = \int_{v_1}^{v_2} p dv - (p_2 v_2 - p_1 v_1). \quad (8.13)$$

Следует подчеркнуть, что для различных термодинамических процессов, протекающих в интервале давлений от p_1 до p_2 , величина и знак разности $(p_2 v_2 - p_1 v_1)$ различны. Нетрудно показать, что для процессов с показателем политропы $n < 1$ эта разность будет положительна, для процессов с $n > 1$ (в том числе и для адиабатного процесса) — отрицательна.

Величину $\int_{p_2}^{p_1} v dp$ иногда называют *располагаемой работой*. Смысл этого термина ясен — ведь, как видно из (8.10), эта величина равна приросту кинетической энергии потока, который может быть превращен в работу.

В заключение найдем соотношения, связывающие между собой перепад энтальпий $h_1 - h_2$ на участке потока между точками 1 и 2 и располагаемую

работу $\int_{p_2}^{p_1} v dp$.

Из уравнения первого закона термодинамики в форме (2.57)

$$dq = dh - v dp$$

получаем, что для обратимого адиабатного потока ($q_{\text{внеш}} = 0$, $q_{\text{тр}} = 0$ и, таким образом, $q = q_{\text{внеш}} + q_{\text{тр}} = 0$)

$$dh = v dp \quad (8.14)$$

и, следовательно,

$$h_1 - h_2 = \int_{p_2}^{p_1} v dp. \quad (8.15)$$

к оглавлению Главы 8

8.2. Скорость звука

Как известно, *скоростью звука называют скорость распространения в среде малых возмущений* (малыми называются такие возмущения среды, в которых местное изменение давления среды в точке возмущения, т.е. амплитуда давления, пренебрежимо мало по сравнению с общим давлением).

Выясним, как связана скорость звука в данной среде с термодинамическими параметрами этой среды. Для этого рассмотрим процесс распространения слабого возмущения в сжимаемой среде. Пусть в трубу, в которой находится неподвижная сжимаемая среда (газ или жидкость, имеющие давление p и плотность ρ), вводится поршень (рис. 8.3). В некоторый момент времени этот поршень начинает двигаться со скоростью dw . Поскольку рассматриваемый газ сжимаем, он не будет сразу же перемещаться по трубе со скоростью поршня (как это было бы, если бы вместо газа поршень проталкивал, например, помещенный в трубу металлический цилиндр). В данном случае слой газа, непосредственно прилегающего к поршню, сжима-

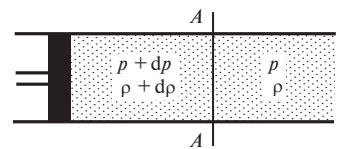


Рис. 8.3

ется и давление газа в этом слое несколько повышается до величины $p + dp$; затем сжимается слой газа, прилегающий к первому слою, и т.д. Иными словами, в газе распространяется так называемая слабая волна сжатия, которую можно представить себе в виде перемещающегося вдоль газа сечения AA (см. рис. 8.3), перед которым газ неподвижен и имеет давление p и плотность ρ (невозмущенная область); позади этого сечения газ, движущийся со скоростью dw , имеет давление $p + dp$ и плотность $\rho + d\rho$ (возмущенная область). Скорость перемещения этого сечения вдоль газа, т.е. скорость распространения рассматриваемого нами слабого возмущения, обозначим через a . За время dt сечение AA , отделяющее невозмущенную область от возмущенной, переместится на расстояние adt . Масса невозмущенного газа dM_n , которая будет захвачена этим сечением за время dt , будет, очевидно, равна:

$$dM_n = \rho \Sigma \cdot a dt, \quad (8.16)$$

т.е. произведению пути, пройденного сечением AA , на площадь сечения трубы Σ и на плотность невозмущенного газа ρ . Масса возмущенного газа dM_b , которую сечение AA оставит за собой за это время, будет, очевидно, равна:

$$dM_b = (\rho + d\rho) \Sigma \cdot (a - dw) dt. \quad (8.17)$$

Важно подчеркнуть, что вместо скорости a из уравнения (8.16) здесь необходимо использовать величину $(a - dw)$; поскольку возмущенный газ перемещается со скоростью dw , он стремится «догнать» сечение AA , которое перемещается относительно этого возмущенного газа со скоростью, равной $(a - dw)$, а не a . Из соображений неразрывности заключенной в трубе массы газа следует, что

$$dM_n = dM_b,$$

отсюда с учетом (8.16) и (8.17) получаем:

$$\rho a = (\rho + d\rho)(a - dw). \quad (8.18)$$

В этом уравнении две неизвестные величины: w и a . Для того чтобы определить интересующую нас скорость распространения слабого возмущения a , это уравнение необходимо дополнить еще одним уравнением, содержащим неизвестные w и a . В качестве такого уравнения удобно использовать известное из механики уравнение импульсов, в соответствии с которым изменение количества движения тела с массой M равно импульсу, полученному этим телом под действием силы F .

За время dt захваченная сечением AA масса невозмущенного газа dM_n , определяемая уравнением (8.16), изменила свою скорость от нуля до dw . Таким образом, изменение количества движения этой массы за время dt равно $dw \cdot dM_n$. Сила, действующая на эту массу газа, равна произведению площади поперечного сечения трубы Σ на разность давлений слева и справа от рассматриваемой массы газа, т.е. на величину dp . Следовательно, импульс силы будет равен $\Sigma \cdot dp \cdot dt$. Упомянутое выше уравнение импульсов будет с учетом (8.16) выглядеть следующим образом:

$$\Sigma \cdot dp \cdot dt = \rho \Sigma \cdot a \cdot dt \cdot dw,$$

отсюда

$$dp = \rho a \cdot dw. \quad (8.19)$$

Совместно решая уравнения (8.18) и (8.19) и пренебрегая при этом бесконечно малыми величинами второго порядка, получаем:

$$dp = a^2 d\rho. \quad (8.20)$$

Отсюда следует, что скорость распространения малых возмущений (скорость звука в среде) определяется соотношением

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \quad (8.21)$$

Для расчета скорости звука в газах это уравнение впервые было применено в 1687 г. Ньютоном. Для того чтобы воспользоваться уравнением (8.21), нужно знать, как происходит процесс распространения звуковых волн, т.е. для каких условий следует вычислять производную $dp/d\rho$.

Ньютон считал, что процесс распространения звука в газе происходит в изотермических условиях. Воспользовавшись уравнением Бойля—Мариотта для изотермического процесса в идеальном газе

$$p\nu = \text{const},$$

из которого следует, что

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = \frac{p}{\rho}, \quad (8.22)$$

Ньютон вычислил скорость звука в воздухе при атмосферном давлении и комнатной температуре (при этих параметрах воздух с хорошим приближением можно рассматривать как идеальный газ). Однако в прямых измерениях скорости звука в воздухе было получено значение a , примерно на 20 % превосходящее скорость, найденную Ньютоном.

Причина этих расхождений была установлена П. Лапласом, который отметил, что поскольку звуковые колебания в среде распространяются очень быстро, сколько-нибудь заметного теплообмена между зонами разрежения и сжатия звуковой волны и окружающей средой не успевает произойти, и поэтому колебания среды при распространении звуковой волны можно считать адиабатными. Поэтому производную, стоящую в уравнении (8.21), следует брать при условии $s = \text{const}$, т.е.

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}. \quad (8.21a)$$

Уравнение (8.21a) носит название *уравнения Лапласа*. Это уравнение позволяет по известной величине $(\partial p/\partial \rho)_s$ вычислить скорость распространения звука в среде.

Величину a , вычисленную по уравнению Лапласа, иногда называют *термодинамической скоростью звука* или скоростью звука нулевой частоты. Дело в том, что при распространении в газе или жидкости звуковых колебаний достаточно высоких частот перестает быть справедливым предположение об изоэнтропном характере звуковых колебаний; при этих частотах скорость звука уже зависит от частоты и несколько отличается от величины a , определяемой уравнением Лапласа. Однако для широкого интервала частот, представляющих практический интерес, уравнение Лапласа дает значения a , совпадающие с экспериментально измеренными в пределах сотых долей процента.

С учетом того, что $\rho = 1/\nu$, запишем уравнение Лапласа (8.21a) в следующем виде:

$$a = \sqrt{-\nu^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \nu}\right)_s}, \quad (8.23)$$

где $(\partial p/\partial \nu)_s$ — величина, обратная адиабатной сжимаемости вещества.

Поскольку величины ν и $(\partial p/\partial \nu)_s$ являются функциями состояния, скорость звука a , определяемая уравнением Лапласа, также является *термодинамической функцией состояния*.

Заметим, что уравнение Лапласа справедливо для любых сжимаемых однородных сред, в том числе и для твердых тел, имеющих малую по сравнению с газами и жидкостями, но тем не менее вполне конечную сжимаемость. Так, если для водяного пара при температуре 100 °С и атмосферном давлении (98 кПа = 1 кгс/см²) адиабатная сжимаемость равна $(\partial \nu/\partial p)_s = -0,1259 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4 \cdot \text{с}^2/\text{кг}^2$, для воды при

температуре 20 °С и том же давлении $(\partial v/\partial p)_s = -0,4434 \cdot 10^{-12} \text{ м}^4 \cdot \text{с}^2/\text{кг}^2$, то для железа при той же температуре $(\partial v/\partial p)_s \approx -6,14 \cdot 10^{-16} \text{ м}^4 \cdot \text{с}^2/\text{кг}^2$, а скорость звука в каждой из этих сред составляет соответственно 471, 1505 и 5130 м/с. У абсолютно несжимаемой среды

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = 0,$$

и скорость распространения звука в такой среде равна бесконечности.

Напомним, что ранее (§ 7.4) показатель изоэнтروпы был определен нами следующим образом:

$$k = -\frac{v}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s.$$

Из (8.23) и (7.44) очевидно, что

$$a = \sqrt{kp v}. \tag{8.24}$$

Уравнение (8.24) позволяет определить величину a по известным значениям давления p , удельного объема среды v и показателя изоэнтропы (адиабаты) k .

С учетом уравнения Клапейрона (1.23)

$$p v = R T$$

получаем для идеального газа:

$$a = \sqrt{k R T}. \tag{8.25}$$

Отсюда следует, что для идеального газа скорость звука пропорциональна \sqrt{T} , причем коэффициент пропорциональности различен для разных идеальных газов (различные k и R).

Следует также заметить, что, поскольку [см. (1.32)]

$$R = \frac{8314}{\mu} \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}),$$

где μ — относительная молекулярная масса газа, из (8.25) следует, что скорость звука в газе тем больше, чем меньше молекулярная масса этого газа.

Численные значения скорости звука в газах иллюстрируются табл. 8.1, в которой приведены подсчитанные с помощью уравнения (8.25) значения a для разных газов при температуре 20 °С.

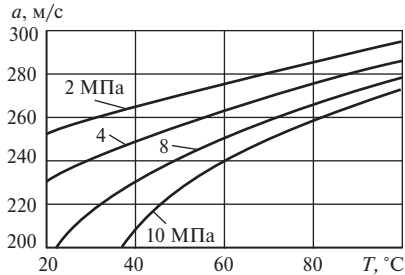


Рис. 8.4

Таблица 8.1. Скорость звука в газах при температуре 20 °С

Газ	μ	$R, \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$	k	$a, \text{ м/с}$	Газ	μ	$R, \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$	k	$a, \text{ м/с}$
Водород	2,016	4124	1,41	1305	Кислород	32,000	259,8	1,40	327
Гелий	4,003	2077	1,66	1005	Диоксид углерода	44,010	188,9	1,31	269
Водяной пар	18,016	461,4	1,33	424	Фреон-12 (CCl ₂ F ₂)	120,920	69,28	1,14	152
Азот	28,016	296,8	1,40	349					
Воздух	28,960	287,0	1,40	343					

Подчеркнем еще раз, что уравнение (8.24) справедливо и для идеальных, и для реальных газов (в том числе и для жидкостей), и для твердых тел, тогда как уравнение (8.25) справедливо только для идеальных газов.

Как видно из уравнения (8.25), скорость звука в идеальном газе зависит для данного газа только от температуры; для реального газа скорость звука зависит не только от температуры, но и от давления. Примером такой зависимости может служить приведенный на рис. 8.4 график $a = f(p, T)$ для диоксида углерода.

к оглавлению Главы 8

8.3. Истечение из суживающихся сопел

Перейдем теперь к расчету процессов истечения газа.

Для увеличения скорости потока применяют специально спроектированные каналы, называемые *соплами*. Сопло представляет собой канал, суживающийся в направлении движения потока¹⁾.

Рассмотрим процесс обратимого, т.е. без трения, адиабатного истечения газа из сопла, соединенного с газовым резервуаром большого объема (рис. 8.5). Объем резервуара предполагаем настолько большим, что истечение газа через сопло в течение рассматриваемых промежутков времени не приводит к сколько-нибудь заметному уменьшению давления газа в резервуаре. Параметры газа в резервуаре обозначим p_1, v_1 и T_1 , а давление газа на выходе из сопла p_2 . Будем считать, что давление газа на выходе из сопла p_2 равно давлению среды, в которую поступает газ (важность этого условия будет ясна из дальнейшего).

Скорость газа на входе в сопло обозначим w_1 .

Определим скорость истечения газа из сопла w_2 по известным значениям w_1, p_1, v_1 и p_2 . Эта задача может быть решена, как отмечено ранее, с помощью уравнения (8.9)

$$w_2 = \sqrt{2(h_1 - h_2) + w_1^2},$$

при этом для определения перепада энтальпий $h_1 - h_2$ удобно воспользоваться h, s -диаграммой.

Можно решить эту задачу и другим способом — воспользовавшись уравнением (8.11):

$$w_2 = \sqrt{2 \int_{p_2}^{p_1} v dp + w_1^2},$$

где интеграл $\int_{p_2}^{p_1} v dp$ вычисляется по экспериментальным данным по p, v -зависимости для изоэнтропы.

Величина w_2 с помощью уравнения (8.11) легко может быть определена для обратимого адиабатного течения несжимаемой жидкости. Поскольку для несжимаемой жидкости $v \neq f(p)$, в уравнении (8.11) величина v может быть вынесена за знак интеграла; тогда уравнение (8.11) приобретет следующий вид:

$$w_2 = \sqrt{2v(p_1 - p_2) + w_1^2}. \quad (8.26)$$

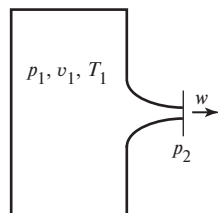


Рис. 8.5

¹⁾ Сопла этого профиля применяются при дозвуковых скоростях течения. Форма сверхзвуковых сопел будет описана ниже.

Задача определения w_2 с помощью уравнения (8.11) легко решается также для случая истечения идеального газа. Из уравнения адиабаты (7.51) получаем:

$$v = \frac{p_1^{1/k}}{p^{1/k}} v_1. \quad (8.27)$$

Подставляя это значение v в уравнение (8.11) и интегрируя его, получаем для скорости истечения газа из сопла:

$$w_2 = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} + w_1^2. \quad (8.28)$$

Если скорость потока на входе в сопло w_1 пренебрежимо мала по сравнению с w_2 , то уравнение (8.28) записывается в следующем виде:

$$w_2 = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}. \quad (8.29)$$

Как видно из этого уравнения, скорость истечения газа из сопла w тем больше, чем меньше значение отношения давлений p_2/p_1 .

Расход газа через сопло G вычисляется следующим образом. Объем газа, вытекающего из сопла в единицу времени, очевидно, равен

$$V = v_2 G,$$

где v_2 — удельный объем газа в выходном сечении сопла. С другой стороны, эта же величина V может быть определена как

$$V = \Sigma \cdot w,$$

где Σ — площадь выходного сечения сопла. Отсюда следует, что

$$G = \frac{\Sigma \cdot w}{v_2}. \quad (8.30)$$

Заменяя в этом соотношении v_2 с помощью уравнения адиабаты (7.50)¹⁾, представляемого в виде

$$\frac{1}{v_2} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}} \frac{1}{v_1}, \quad (8.31)$$

получаем:

$$G = \frac{\Sigma w}{v_1} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}}. \quad (8.32)$$

Подставляя сюда значение w из уравнения (8.29), имеем:

$$G = \Sigma \cdot \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{v_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}. \quad (8.33)$$

Полученное нами уравнение связывает между собой массовый расход идеального газа при обратимом адиабатном течении через сопло, площадь выход-

¹⁾ С помощью этого соотношения может быть вычислена величина v_2 . Температура газа на выходе из сопла T_2 может быть вычислена из уравнения Клапейрона по известным p_2 и v_2 .

ного сечения сопла Σ и величины p_1 , v_1 и p_2 . С помощью этого уравнения можно решить и обратную задачу — найти, какой должна быть площадь выходного сечения сопла Σ , для того чтобы обеспечить заданный расход G газа через сопло при заданных параметрах газа на входе в сопло и на выходе из него.

Анализ характера зависимости расхода G от отношения давления газа на выходе из сопла к давлению перед соплом p_2/p_1 , даваемый уравнением (8.33), (обозначим эту величину ψ) показывает, что эта зависимость имеет вид, представленный на рис. 8.6 (кривая I - K -0). Очевидно, что $G = 0$ при $\psi = 1$. При дальнейшем уменьшении ψ значение G начинает возрастать, достигая максимума при некотором ψ . При дальнейшем уменьшении ψ значение G в соответствии с уравнением (8.33) уменьшается, обращаясь в нуль при $\psi = 0$.

Сравнение описанной зависимости $G = f(\psi)$ с экспериментальными данными по истечению газов из сопел обнаружило любопытную картину. В интервале значений ψ от единицы до значения, соответствующего максимальному расходу, результаты расчета по уравнению (8.33) хорошо совпадают с экспериментальными данными (правая ветвь кривой на рис. 8.6). Что же касается области значений ψ между значением, соответствующим максимальному расходу, и нулем, то был обнаружен удивительный результат — уменьшение давления среды за соплом никак не влияло на расход газа через сопло; расход G оставался постоянным для всего этого интервала изменений ψ (вплоть до $\psi = 0$). Кривая зависимости $G = f(\psi)$, соответствующая реальному протеканию процесса, изображена на рис. 8.6 жирной линией. Для того чтобы объяснить это расхождение теории с экспериментом, в 1839 г. А. Сен-Венаном была выдвинута гипотеза о том, что при расширении газа в суживающемся сопле невозможно получить давление газа ниже некоторого критического давления¹⁾ истечения p^* , соответствующего максимальному расходу газа через сопло. Следовательно, при сколь угодно низких давлениях среды за соплом, меньших p^* , давление газа в выходном сечении суживающегося сопла остается постоянным и равным p^* . Таким образом, прямолинейная часть зависимости $G = f(\psi)$ на рис. 8.6 соответствует просто постоянному значению $p_2 = p^*$. Дальнейшие исследования показали, что эта гипотеза была правильной. Поэтому сделанное ранее заключение о том, что скорость газа на выходе из сопла w растет с уменьшением ψ , нуждается в существенном уточнении: этот рост имеет место лишь до тех пор, пока p_2 не уменьшится до p^* . Дальнейшее снижение давления за соплом не приводит к росту w .

Сказанное иллюстрируется графиком, представленным на рис. 8.7, где изображена зависимость давления в выходном сечении сопла p_2 от давления среды p_c . Как видно из графика, при $p_2 > p^*$ давление газа в выходном сечении сопла

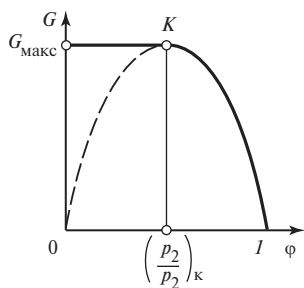


Рис. 8.6

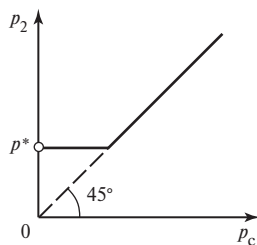


Рис. 8.7

¹⁾ Не смешивать с давлением в критической точке на кривой насыщения.

равно давлению среды, в которую истекает газ из сопла. При $p_c < p^*$ давление газа в выходном сечении сопла p_2 остается постоянным и равным критическому давлению p^* .

Выясним, что же происходит в сопле при снижении давления среды до p^* . С этой целью исследуем уравнение (8.33) на максимум. Величина G достигает максимума тогда, когда максимального значения достигает разность, заключенная в квадратных скобках правой части этого уравнения. Дифференцируя эту разность по ψ и приравнявая (в соответствии с правилами отыскания экстремума) полученную величину нулю, имеем:

$$\frac{2}{k} \psi^{\frac{2}{k}-1} - \frac{k+1}{k} \psi^{\frac{1}{k}} = 0.$$

Обозначая величину ψ для $G = G_{\text{макс}}$ (и, следовательно, для $p_2 = p^*$) через $\psi_{\text{кр}}$, получаем:

$$\psi_{\text{кр}} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (8.34)$$

Это соотношение показывает, что значение критического отношения давлений $\psi_{\text{кр}} = p^*/p_1$ зависит от k , однако эта зависимость слабая: так, для $k = 1,4$ $\psi_{\text{кр}} = 0,53$, а для $k = 1,3$ $\psi_{\text{кр}} = 0,55$; таким образом, изменение ψ не слишком велико. Для разного рода оценочных расчетов можно в первом приближении пренебречь зависимостью $\psi_{\text{кр}}$ от k и считать $\psi_{\text{кр}} \approx 0,5$.

Несколько ранее мы получили уравнение (8.29) для расчета скорости истечения идеального газа из сопла по известным значениям p_1 , v_1 и $\psi = p_2/p_1$. Для того чтобы получить из (8.29) выражение для скорости истечения газа из сопла при максимальном расходе (обозначим эту скорость w^*), нужно подставить в уравнение (8.29) полученное по уравнению (8.34) значение $\psi_{\text{кр}}$. Осуществляя эту подстановку, получаем:

$$w^* = \sqrt{2 \frac{k}{k+1} p_1 v_1}. \quad (8.35)$$

Соответственно выражение для максимального расхода через сопло получим из (8.33) с учетом (8.34):

$$G_{\text{макс}} = \Sigma \cdot \sqrt{2 \frac{k}{k+1} \frac{p_1}{v_1} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{2}{k-1}}}. \quad (8.36)$$

Выразим теперь в уравнении (8.35) величины p_1 и v_1 через параметры газа в выходном сечении сопла p^* и v^* . Из уравнения адиабаты (7.51) следует, что

$$v_1 = v^* \left(\frac{p^*}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}}; \quad (8.37)$$

заменяя здесь отношение p^*/p_1 в соответствии с уравнением (8.34), получаем:

$$v_1 = v^* \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (8.38)$$

Что же касается величины p_1 , то она выражается через p^* с помощью того же уравнения (8.34):

$$p_1 = p^* \left(\frac{2}{k+1} \right)^{-\frac{k}{k-1}}. \quad (8.39)$$

Подставляя полученные значения v_1 и p в уравнение (8.35), имеем:

$$w^* = \sqrt{kp^* v^*}. \quad (8.40)$$

Как видно из сравнения полученного нами выражения для w^* с уравнением (8.24), величина w^* равна местной скорости звука¹⁾ в выходном сечении сопла:

$$w^* = a. \quad (8.40a)$$

Именно этим объясняются отмеченные выше «странности» в характере зависимости $G = f(\psi)$. В самом деле, как указано при выводе уравнения Лапласа для скорости звука, любое слабое возмущение, в том числе и изменение давления, распространяется в сжимаемой среде со звуковой скоростью. Если в некоторый момент времени давление газа за соплом p_2 несколько уменьшить, то волна разрежения распространится вдоль потока в направлении, противоположном направлению истечения потока; вдоль сопла установится новое распределение давлений (при том же, что и раньше, значении давления газа перед соплом p_1), и скорость истечения возрастет. При этом следует отметить, что волна разрежения будет распространяться вдоль сопла с относительной скоростью $a - w$.

Рассмотрим теперь случай, когда давление среды, в которую истекает газ, p_2 равно p^* и скорость истечения соответственно равна местной скорости звука; при дальнейшем снижении давления среды ниже p^* волна разрежения не сможет распространиться вдоль сопла, так как ее относительная скорость $a - w$ будет равна нулю вследствие того, что в этом случае $w = a$. Никакого перераспределения давления вдоль сопла не произойдет, и несмотря на то, что давление среды за соплом снизилось, скорость истечения останется прежней, равной местной скорости звука на выходе из сопла. По образному выражению О. Рейнольдса, в этом случае поток в сопле «не знает» о том, что давление за соплом снизилось. Поэтому при $0 \leq \psi \leq \psi_{\text{кр}}$ расход газа через сопло сохраняется постоянным, равным $G_{\text{макс}}$.

При рассмотрении течения газа через сопло, естественно, возникает вопрос: из каких соображений и как выбирается форма сопла, т.е. площади входного и выходного сечений, длина сопла, его профиль? Давления на входе в сопло p_1 и в среде за соплом p_c обычно бывают заданы заранее. Если значение расхода газа через сопло задается, то площади входного и выходного сечений подсчитывают с помощью соотношения типа (8.30):

$$G = \frac{\sum_{\text{вх}} w_1}{v_1} = \frac{\sum_{\text{вых}} w_2}{v_2}. \quad (8.41)$$

Скорость газа на выходе из сопла подсчитывается по уравнению (8.28) в общем случае и по уравнению (8.29) для $w_1 \ll w_2$. Из изложенного выше следует, что длина сопла никак не фигурирует в термодинамических соотношениях, определяющих закономерности обратимого адиабатного течения через

¹⁾ Поскольку, как видно из (8.24), скорость звука a различна для различных значений p и v , а при адиабатном течении газа его давление и, следовательно, удельный объем изменяются вдоль сопла, скорость звука в газе будет различной для различных сечений сопла. Именно поэтому для обозначения скорости звука в газе при параметрах, соответствующих данному сечению сопла, применяют выражение «местная скорость звука».

сопла. Отсюда следует, что при обратимом адиабатном течении безразлично, какова будет длина сопла, т.е. на каком расстоянии друг от друга будут расположены строго рассчитанные входное $\Sigma_{\text{вх}}$ и выходное $\Sigma_{\text{вых}}$ сечения сопла, соединенные между собой плавным каналом. Однако сопло, предназначенное для реального процесса истечения, имеет длину, обусловленную входным и выходным сечениями и углом конусности; последний выбирается из условий минимальных потерь на трение.

Приступая к расчету истечения идеального газа из сопла при заданных значениях p_1 и p_c , следует прежде всего сравнить отношение p_c/p_1 с величиной $\Psi_{\text{кр}}$, определяемой уравнением (8.34).

Если

$$\frac{p_c}{p_1} > \Psi_{\text{кр}},$$

то

$$p_2 = p_c$$

и расчет истечения следует вести по уравнениям (8.29) и (8.33).

Если

$$\frac{p_c}{p_1} = \Psi_{\text{кр}},$$

то

$$p_2 = p_c = p^*$$

и для расчета следует применить уравнения (8.35) и (8.36).

Наконец, если $p_c/p_1 < \Psi_{\text{кр}}$, то $p_2 = p^* > p_c$ и расчет ведется по тем же, что и в предыдущем случае, уравнениям (8.35) и (8.36).

Расчет скорости истечения реальных газов, как уже было отмечено ранее, проводится по уравнению (8.9) или (8.11) с помощью h, s -диаграммы или p, v, T -данных, как описано выше. Площадь выходного сечения сопла подсчитывается по уравнению (8.30), которое, разумеется, справедливо для течения любых сред.

Определение p^* для обратимого адиабатного течения реального газа осуществляется следующим способом. Построим график зависимости скорости истечения из сопла w от величины p_2 при заданных параметрах газа на входе в сопло (p_1 и T_1). Напомним, что поскольку процесс течения предполагается обратимым адиабатным, то состояния реального газа, соответствующие расширению в сопле, будут располагаться в h, s -диаграмме на изоэнтропе ниже точки I , соответствующей параметрам газа на входе в сопло (рис. 8.8, *a*). Определяя для разных изобар $p_2 < p_1$ значения h_2 в точках пересечения этих изобар с изоэнтропой $s = \text{const}$ с помощью уравнения (8.9), которое в случае $w_1 \ll w_2$ принимает вид:

$$w = \sqrt{2(h_1 - h_2)}, \quad (8.42)$$

находим значения w для каждого значения p_2 (обозначим их $p_{\text{II}}, p_{\text{III}}, p_{\text{IV}}$ и т.д.). Найденные таким образом значения w наносим на график $w = f(p_2)$, представленный на рис. 8.8, *б*; очевидно, что при $p_2 = p_1$ $w = 0$. Для состояний, соответствующих точкам пересечения каждой из изобар $p_{\text{II}}, p_{\text{III}}, p_{\text{IV}}$ и т.д. с изоэнтропой, находим значения скорости звука a в газе. Значения a либо берутся из таблиц зависимости скорости звука от параметров состояния (такие таблицы составлены для многих веществ), либо вычисляются по уравнению Лапласа с помощью данных по адиабатной сжимаемости этого реального газа. Чем

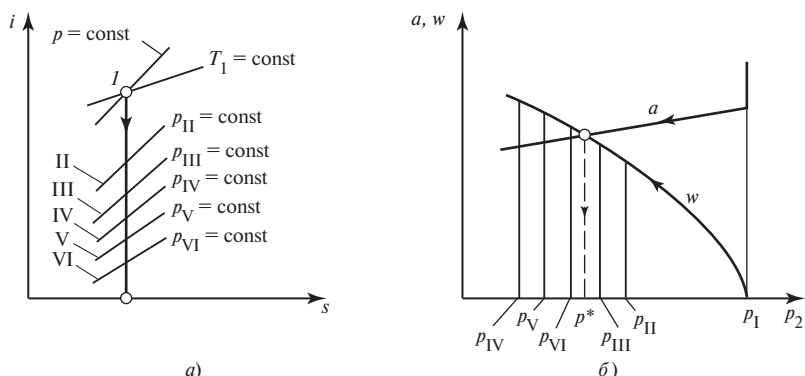


Рис. 8.8

ниже давление на изоэнтропе, тем меньше значения скорости звука в реальном газе. Наносим значения a для разных значений p_2 (p_{II} , p_{III} , p_{IV} и т.д.) на график $w = f(p_2)$. Очевидно, что точка пересечения кривых $w = f(p_2)$ и $a = \varphi(p_2)$ будет соответствовать тому давлению p_2 , при котором скорость истечения реального газа из сопла (при обратимом адиабатном течении) станет равна местной скорости звука. Следовательно, давление p_2 и будет критическим давлением истечения p^* .

Такие параметры реального газа на выходе из сопла, как удельный объем, температура и др., могут быть найдены из h, s -диаграммы, поскольку положение точки 2 в диаграмме известно (см. рис. 8.1).

Может возникнуть вопрос: почему для увеличения кинетической энергии потока применяются специальные аппараты — сопла? Почему нельзя использовать истечение газа, например, просто из отверстия в стенке резервуара высокого давления или из присоединенной к этому отверстию трубы постоянного сечения, рассчитывая сечения отверстия или трубы по уравнению (8.33)? Ведь, как мы уже отмечали, в термодинамических соотношениях, описывающих процесс истечения, фигурирует только одна геометрическая характеристика канала — площадь выходного сечения канала $\Sigma_{\text{вых}}$ (для случая $w_1 \ll w_2$).

Конструкции реальных аппаратов, используемых для превращения энергии сжатого газа в кинетическую энергию потока, стремятся выполнить таким образом, чтобы свести к минимуму необратимые потери на трение. При истечении газа из отверстия за острыми кромками этого отверстия и перед ними образуются многочисленные завихрения газового потока, что вызывает значительную потерю энергии потока (рис. 8.9, а). Несколько меньшие, но все же значительные потери энергии потока имеют место при истечении не непосредственно из отверстия, а из трубы постоянного сечения, соединенной с этим отверстием (рис. 8.9, б). Поэтому вместо истечения из отверстия применяют истечение из сопла — канала, сечение которого

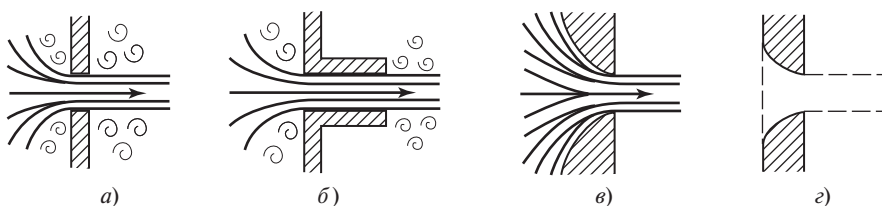


Рис. 8.9

плавно изменяется по длине (рис. 8.9, в). Для уменьшения гидравлического сопротивления внутреннюю поверхность сопла тщательно обрабатывают.

Суживающееся сопло можно рассматривать как трубу, входной участок которой выполнен сглаженным, без острых кромок, а участок постоянного сечения сведен к минимуму (рис. 8.9, з) — ведь, как видно из уравнения (8.30), при адиабатном течении газа без трения и постоянном сечении трубы¹⁾ скорость газа остается неизменной.

к оглавлению Главы 8

8.4. Переход через скорость звука. Сопло Лавала

Рассмотрим теперь некоторые общие закономерности течения в каналах.

При течении газа (жидкости) в канале для любого сечения канала справедливо уравнение

$$G = \frac{\Sigma \cdot w}{v}, \quad (8.43)$$

где G — постоянный массовый расход газа; Σ — площадь сечения канала; w — скорость газа и v — удельный объем газа в данном сечении канала [ранее это уравнение было применено к выходному сечению сопла, см. (8.30)].

Из соображений неразрывности потока очевидно, что при стационарном режиме течения расход газа (жидкости) одинаков в любом сечении потока, т.е.

$$\frac{\Sigma \cdot w}{v} = \text{const}. \quad (8.44)$$

Это уравнение называют в гидродинамике уравнением неразрывности. Логарифмируя последнее уравнение, получаем:

$$\ln \Sigma + \ln w - \ln v = \text{const}; \quad (8.45)$$

дифференцируя соотношение (8.45), имеем:

$$\frac{d\Sigma}{\Sigma} = \frac{dv}{v} - \frac{dw}{w}. \quad (8.46)$$

Это — уравнение неразрывности в дифференциальной форме.

Уравнение (2.86), справедливое для течения без трения при $l_{\text{техн}} = 0$ и $dz = 0$,

$$w \, dw = -v \, dp,$$

запишем в виде

$$\frac{dw}{w} = -\frac{v}{w^3} \, dp. \quad (8.47)$$

Для обратимого адиабатного ($s = \text{const}$) течения в соответствии с уравнением (7.44)

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dp}{kp}. \quad (8.48)$$

Подставляя (8.47) и (8.48) в (8.46), получаем:

$$\frac{d\Sigma}{\Sigma} = \frac{kp v - w^2}{kpw^2} \, dp. \quad (8.49)$$

С учетом (8.24) это уравнение преобразуется к виду

$$\frac{d\Sigma}{\Sigma} = \frac{a^2 - w^2}{kpw^2} \, dp \quad (8.50)$$

¹⁾ Если трение отсутствует и $l_{\text{техн}} = 0$, то при адиабатном течении в трубе постоянного сечения давление газа и, следовательно, его удельный объем не изменяются вдоль трубы.

или, что то же самое,

$$\frac{d\Sigma}{\Sigma} = \frac{1}{kp} \left(\frac{1}{M^2} - 1 \right) dp, \quad (8.50a)$$

где $M = w/a$ — так называемое число Маха¹⁾ (отношение скорости течения к местной скорости звука). Значение $M < 1$ соответствует течению с дозвуковыми скоростями ($w < a$), а $M > 1$ — течению со скоростями, превышающими скорость звука ($w > a$).

Уравнение (8.50a) связывает изменение площади поперечного сечения канала (при адиабатном течении без трения и без совершения технической работы) с изменением давления в потоке и с числом Маха. Подставляя в (8.50a) выражение для dp из уравнения (2.86), получаем уравнение, связывающее изменение площади сечения канала с изменением скорости потока и с M :

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = \frac{d\Sigma}{\Sigma}. \quad (8.51)$$

Из уравнения (8.50a) следует, что при дозвуковых скоростях течения ($M < 1$) сужение канала ($d\Sigma < 0$) соответствует снижению давления в потоке вдоль канала ($dp < 0$), т.е. случаю обычного суживающегося сопла; уравнение (8.51) показывает, что в этом случае ($M < 1$) при сужении канала, как и следовало ожидать, скорость потока увеличивается ($dw > 0$).

Если же при дозвуковом течении канал расширяется ($d\Sigma > 0$), то скорость потока снижается ($dw < 0$), а давление в потоке вдоль канала возрастает ($dp > 0$). Расширяющиеся каналы, применяемые для торможения дозвукового потока, т.е. для превращения кинетической энергии потока в потенциальную энергию сжатого газа, носят название диффузоров. Диффузоры находят широкое применение в самых различных областях техники.

Уравнения (8.50a) и (8.51) позволяют сделать важные выводы и для случая течения потока со сверхзвуковой скоростью ($M > 1$).

Из этих уравнений следует, что при $M > 1$ течение в расширяющемся канале ($d\Sigma > 0$) происходит с уменьшением давления вдоль потока ($dp < 0$) и с увеличением скорости ($dw > 0$) и, наоборот, сверхзвуковой поток в суживающемся канале ($d\Sigma < 0$) замедляется ($dw < 0$), а его давление возрастает ($dp > 0$). Таким образом, профили сопла и диффузора для сверхзвукового потока «меняются местами» — сверхзвуковое сопло представляет собой расширяющийся канал, а сверхзвуковой диффузор — суживающийся канал.

Результаты анализа уравнений (8.50a) и (8.51) систематизированы в табл. 8.2. Из этого анализа становится очевидным, как осуществить дальнейшее ускорение потока, который при $p_c \leq p^*$ приобрел на выходе из суживающегося сопла звуковую скорость; для этого сопло должно быть спрофилировано таким образом, чтобы канал суживался до тех пор, пока давление в канале не станет равным критическому давлению истечения p^* ; напомним, что в этом сечении скорость потока становится равной местной скорости звука. За этим сечением канал должен быть

Таблица 8.2. Профили каналов для различных режимов течения

Вид потока	Вид канала	
	Сопло (ускорение потока, падение давления вдоль потока)	Диффузор (торможение потока, увеличение давления вдоль потока)
Дозвуковой ($M < 1$)	Суживающееся	Расширяющийся
Сверхзвуковой ($M > 1$)	Расширяющееся	Суживающийся

¹⁾ По имени австрийского физика Э. Маха.

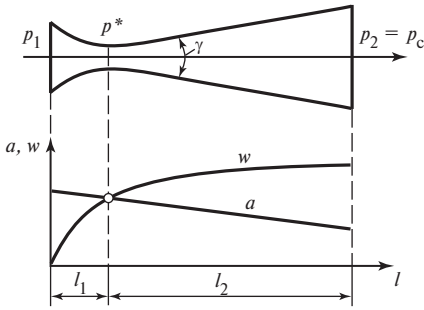


Рис. 8.10

выполнен расширяющимся. В соответствии со сказанным выше поток перейдет через скорость звука и будет продолжать ускоряться в расширяющейся части сопла. Таким образом, для ускорения потока будет использован весь перепад давления от давления на входе в сопло p_1 до давления среды $p_c < p^*$, а не только часть этого перепада от p_1 до p^* , реализуемая в суживающемся дозвуковом сопле.

Такое комбинированное сопло, состоящее из суживающейся и расширяющейся частей, впервые было применено для получения сверхзвуковых скоростей истечения газа шведским инженером К. Лавалем в 80-х годах XIX столетия, поэтому сопла такого типа называют соплами Лавалья.

Разрез сопла Лавалья изображен на рис. 8.10. Там же представлен график распределения скорости потока, а также местной скорости звука по длине сопла.

Расчет суживающейся части сопла Лавалья проводится так же, как и обычного суживающегося дозвукового сопла. Площадь минимального сечения сопла определяется по заданному расходу G уравнением, аналогичным уравнению (8.30):

$$\Sigma_{\text{мин}} = \frac{Gv_{\text{мин}}}{a}, \tag{8.52}$$

где a — местная скорость звука.

Скорость газа на выходе из сопла Лавалья определяется приведенным ранее уравнением (8.9) или (8.42), а для идеального газа — уравнением (8.28) или (8.29).

Площадь выходного сечения сопла определяется из уравнения (8.30):

$$\Sigma_{\text{вых}} = \frac{Gv_2}{w}. \tag{8.53}$$

Удельный объем газа в выходном сечении сопла v_2 для идеального газа может быть найден из уравнения адиабаты (8.27) по известным значениям p_1 , v_1 и p_2 :

$$v_2 = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{k}} v_1. \tag{8.54}$$

Длина суживающейся части сопла, как и длина всякого дозвукового сопла (l_1 на рис. 8.10), по соображениям, изложенным выше, выбирается минимальной. Что же касается длины расширяющейся, сверхзвуковой части сопла, имеющей обычно коническую форму, то она выбирается такой, чтобы угол раствора сопла (γ на рис. 8.10) не превышал $11\text{--}12^\circ$; при больших углах раствора возникает опасность отрыва потока от стенок сопла.

Сопло Лавалья рассчитывается таким образом, чтобы давление в выходном сечении сопла p_2 было равно давлению среды p_c . Режимы работы сопла, в которых давление среды отличается от расчетного давления p_2 , называются нерасчетными.

к оглавлению Главы 8

8.5. Адиабатное течение с трением

Рассмотрим процесс истечения с учетом трения газа о стенки канала. Этот случай весьма важен для практики, поскольку в реальных условиях течение газа или жидкости в каналах всегда сопровождается большими или меньшими потерями энергии на преодоление трения, обусловленными вязкостью газа, шероховатостью стенок канала и т.д.

Процесс течения по-прежнему считаем происходящим адиабатно, т.е. при отсутствии теплообмена с внешней средой. Вместе с тем очевидно, что этот процесс необратим — при течении выделяется теплота трения $q_{тр}$ и энтропия потока увеличивается в соответствии с соотношением

$$ds = \frac{dq_{тр}}{T}. \quad (8.55)$$

Рассмотрим, как изображается процесс истечения с трением в h, s - и T, s -диаграммах (рис. 8.11).

Если бы истечение было обратимым, без трения, то процесс изображался бы в h, s -диаграмме отрезком изэнтропы $s_1 = s_2 = \text{const}$, заключенным между изобарами p_1 и p_2 (между точками 1 и 2), а скорость на выходе из сопла w определялась бы значением разности энтальпий $h_1 - h_2$. Вследствие необратимых потерь при трении энтропия газа в процессе истечения возрастает и действительная адиабата отклоняется от изэнтропы вправо (рис. 8.11, а)¹⁾. Далее, поскольку при истечении как без трения, так и с трением расширение газа в потоке происходит, естественно, до одного и того же давления p_2 на выходе из сопла, очевидно, что точка, соответствующая действительному процессу истечения с трением, будет лежать на той же изобаре, но правее точки 2 (точка 2д относится к процессу истечения с трением), поскольку $s_{2д} > s_2$. Энтальпию газа на выходе из сопла при истечении с трением обозначим $h_{2д}$. Поскольку изобары в h, s -диаграмме имеют положительный наклон, то

$$h_{2д} > h_2, \quad (8.56)$$

и, таким образом, в процессе истечения с трением «срабатывается» разность энтальпий $h_1 - h_{2д}$ меньшая, чем в случае обратимого течения без трения. Следовательно, и скорость газа на выходе из сопла при истечении с трением будет меньшей, чем при истечении без трения; обозначим эту скорость $w_{д}$. Поскольку всегда

$$w_{д} < w, \quad (8.57)$$

можно записать

$$w_{д} = \varphi w, \quad (8.58)$$

где φ — так называемый скоростной коэффициент, $\varphi < 1$. Как показывает практика, для хорошо обработанных и спрофилированных сопел, имеющих достаточно гладкую поверхность, $\varphi = 0,95 \div 0,98$.

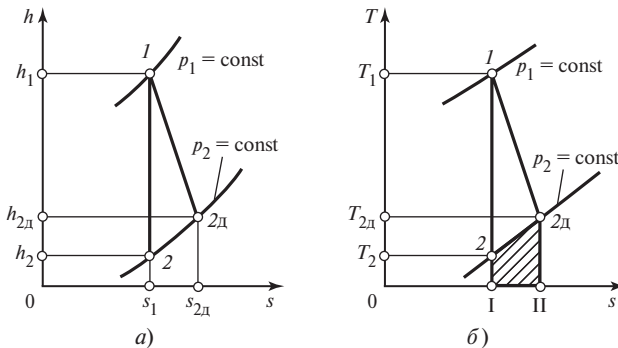


Рис. 8.11

¹⁾ Изображение необратимой адиабаты в h, s -диаграмме является условным, поскольку, как мы уже неоднократно отмечали, в диаграммах состояния в принципе могут изображаться только кривые обратимых процессов.

Потеря энергии потока на преодоление трения (обозначим ее $\Delta E_{\text{тр}}$) может быть выражена как уменьшение кинетической энергии потока на выходе из сопла при истечении с трением по сравнению с истечением без трения:

$$\Delta E_{\text{тр}} = \frac{w^2 - w_{\text{д}}^2}{2}, \quad (8.59)$$

откуда с учетом (8.58) имеем:

$$\Delta E_{\text{тр}} = \frac{(1 - \varphi^2)w^2}{2}. \quad (8.60)$$

Величина $(1 - \varphi^2)$, обычно обозначаемая ξ , носит название коэффициента потери энергии:

$$\xi = 1 - \varphi^2. \quad (8.61)$$

Вводя это обозначение, записываем (8.59) в виде

$$\Delta E_{\text{тр}} = \frac{\xi w^2}{2}. \quad (8.62)$$

С другой стороны, поскольку [см. (8.42)]

$$w = \sqrt{2(h_1 - h_2)}$$

и соответственно

$$w_{\text{д}} = \sqrt{2(h_1 - h_{2\text{д}})}, \quad (8.63)$$

очевидно, что величина $\Delta E_{\text{тр}}$ может быть выражена следующим образом:

$$\Delta E_{\text{тр}} = h_{2\text{д}} - h_2. \quad (8.64)$$

Наконец, из (8.62) получаем с учетом (8.42):

$$\Delta E_{\text{тр}} = \xi(h_1 - h_2). \quad (8.65)$$

Приравнявая между собой правые части уравнений (8.64) и (8.65), имеем:

$$h_{2\text{д}} = h_2 + \xi(h_1 - h_2). \quad (8.66)$$

Коэффициенты φ и ξ для реальных каналов, конечно, не могут быть определены термодинамическим путем.

Процесс адиабатного истечения в T, s -диаграмме изображается следующим образом. В случае обратимого адиабатного течения состояния, соответствующие входу в сопло (точка 1) и выходу из сопла (точка 2), располагаются, как и в h, s -диаграмме, на изоэнтропе $s_1 = s_2 = \text{const}$ (рис. 8.11, б). Кривая реального адиабатного процесса истечения с трением имеет, как и в h, s -диаграмме, наклон вправо (1-2д). При этом очевидно, что площадь под кривой 1-2д представляет собой не что иное, как работу на преодоление сил трения $l_{\text{тр}}$, необратимо превращающуюся в теплоту $q_{\text{тр}}$, усваиваемую газом [именно нагревом за счет теплоты трения объясняется повышение температуры газа на выходе из сопла в случае трения по сравнению со случаем обратимого течения, $T_{2\text{д}} > T_2$ (рис. 8.11, б)]; в самом деле, из (8.55) следует, что

$$q_{\text{тр}} = \int_{s_1}^{s_{2\text{д}}} T ds; \quad (8.67)$$

этот интеграл берется по адиабате 1-2д.

Из T, s -диаграммы видно, что площадь под отрезком изобары 2-2д (заштрихована на рис. 8.11, б) представляет собой потерю кинетической энергии потока в результате трения $\Delta E_{\text{тр}}$. Действительно, поскольку точки 2 и 2д лежат на изо-

баре, рассматриваемая площадь равна $\int_{s_1}^{s_{2д}} T ds$; этот интеграл берется вдоль изобары $p_2 = \text{const}$.

Поскольку из уравнения

$$T ds = dh - v dp$$

следует, что в изобарном процессе ($dp = 0$)

$$T ds = dh, \tag{8.68}$$

то, следовательно,

$$\int_{s_1}^{s_{2д}} T ds = h_{2д} - h_2. \tag{8.69}$$

Из сравнения площадей I-2-1-2д-II-I и I-2-2д-II-I следует, что потеря кинетической энергии потока вследствие трения $\Delta E_{\text{тр}}$ представляет собой лишь часть теплоты трения. Другая часть теплоты трения, которая выражается в T, s -диаграмме площадью I-2-2д-I, усваиваясь рабочим газом, вновь превращается в работу. Таким образом, всегда

$$h_{2д} - h_2 < q_{\text{тр}}. \tag{8.70}$$

Потеря от необратимости в результате трения выражается лишь заштрихованной площадью I-2-2д-II-I. Отсюда следует, что форма кривой I-2д, условно выражающей необратимую адиабату, не имеет значения для анализа процесса истечения с трением.

Подводя итог сказанному, подчеркнем еще раз, что обратимый (т.е. при отсутствии трения) адиабатный процесс течения описывается следующими тремя основными уравнениями [соответственно (8.8), (8.10а) и (8.15)]:

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = h_1 - h_2;$$

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = \int_{p_2}^{p_1} v dp;$$

$$h_1 - h_2 = \int_{p_2}^{p_1} v dp;$$

каждое из этих уравнений является следствием двух остальных.

Для адиабатного течения с трением эти уравнения преобразуются следующим образом.

Уравнение (8.8) справедливо не только для обратимого адиабатного потока, но и для адиабатного течения с трением. С учетом обозначений, принятых в этом параграфе, запишем уравнение (8.8) в следующем виде:

$$\frac{w_{2д}^2 - w_1^2}{2} = h_1 - h_{2д}. \tag{8.71}$$

Из уравнения (2.85)

$$w dw = -v dp - dl_{\text{тр}}$$

следует, что

$$\frac{w_{2д}^2 - w_1^2}{2} = \int_{p_2}^{p_1} v dp - l_{тр}; \quad (8.72)$$

для случая течения с трением это уравнение аналогично уравнению (8.10а), справедливому для течения без трения.

Так же как и уравнение (8.10а), уравнение (8.72) описывает процесс не только адиабатного, но и любого другого течения, поскольку исходные дифференциальные уравнения (2.86) и (2.85) получены в гл. 2 для произвольного течения. Характер течения проявляется в этих уравнениях в том, что вдоль кривой какого процесса вычисляется интеграл располагаемой работы.

Для адиабатного потока при наличии трения ($q_{внеш} = 0, q = q_{тр}$) имеем из (2.57):

$$dh = v dp + dq_{тр}, \quad (8.73)$$

отсюда

$$h_{2д} - h_1 = \int_{p_1}^{p_2} v dp + q_{тр}, \quad (8.74)$$

или, что то же самое,

$$h_1 - h_{2д} = \int_{p_2}^{p_1} v dp - q_{тр}. \quad (8.74а)$$

С учетом того, что $q_{тр} = l_{тр}$, очевидно, что каждое из трех уравнений (8.71), (8.72) и (8.74а) является следствием двух остальных.

Отметим одно важное обстоятельство: значения располагаемой работы, полученные из уравнения (8.15) для адиабатного потока без трения и из уравнения (8.74а) для адиабатного потока с трением, не равны между собой. Покажем справедливость этого утверждения. Вычитая уравнение (8.74а) из уравнения (8.15), получаем:

$$h_{2д} - h_2 = \left(\int_{p_2}^{p_1} v dp \right)^{обр} - \left(\int_{p_2}^{p_1} v dp \right)^{тр} + q_{тр}. \quad (8.75)$$

С учетом неравенства (8.70) получаем из (8.75):

$$\left(\int_{p_2}^{p_1} v dp \right)^{тр} > \left(\int_{p_2}^{p_1} v dp \right)^{обр}. \quad (8.76)$$

Таким образом, располагаемая работа при адиабатном течении с трением больше, чем при обратимом адиабатном течении. Из уравнения (8.75) с учетом (8.64) получаем для разности этих величин:

$$\left(\int_{p_2}^{p_1} v dp \right)^{тр} - \left(\int_{p_2}^{p_1} v dp \right)^{обр} = q_{тр} - \Delta E_{тр}. \quad (8.77)$$

к оглавлению Главы 8

8.6. Общие закономерности течения. Закон обращения воздействий

Следует еще раз подчеркнуть, что полученные в § 8.3—8.5 выводы справедливы для течения при отсутствии технической работы и при $dz = 0$ [вместо общего соотношения (2.83) мы использовали его частные случаи: для течения без трения — уравнение (2.86), а для течения с трением — уравнение (2.85)], причем течение предполагалось адиабатным [эта оговорка «заложена» в полу-

ченных нами выводах благодаря применению при выводе уравнений (8.3), (8.14) и (8.73), справедливых только для адиабатных процессов].

Рассмотрим теперь уравнение (2.83), описывающее наиболее общий случай течения,

$$w dw = -v dp - g dz - dl_{\text{техн}} - dl_{\text{тр}}.$$

Анализ этого уравнения позволяет сделать интересные заключения о возможных способах ускорения потока.

Значение dp в правой части уравнения в общем случае может быть выражено следующим образом:

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s dv + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_v ds. \quad (8.78)$$

Частную производную $(\partial p / \partial s)_v$ с учетом (4.12) можно представить в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_v = - \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)_p. \quad (8.79)$$

Поскольку

$$\left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)_p = \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_p, \quad (8.80)$$

а, как это следует из (4.45),

$$\left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_p = \frac{T}{c_p},$$

из (8.79) получаем:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_v = - \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \frac{T}{c_p}. \quad (8.81)$$

С учетом этого соотношения находим из (8.78):

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s \left[dv - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \frac{T}{c_p} ds \right]. \quad (8.82)$$

Из уравнения Лапласа (8.23) следует, что

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s = - \frac{a^2}{v^2}. \quad (8.83)$$

Входящий в (8.82) дифференциал dv выразим из уравнения неразрывности (8.46):

$$dv = v \left(\frac{d\Sigma}{\Sigma} + \frac{dw}{w} \right), \quad (8.84)$$

а дифференциал энтропии ds — из общего уравнения (3.115)

$$ds = \frac{dq}{T}.$$

Имея в виду, что, как следует из (2.79),

$$dq = dq_{\text{внеш}} + dq_{\text{тр}}, \quad (8.85)$$

где $q_{\text{внеш}}$ — теплота, подводимая к потоку извне, а $q_{\text{тр}}$ — теплота трения, эквивалентная работе трения $l_{\text{тр}}$, получаем:

$$ds = \frac{dq_{\text{внеш}} + dq_{\text{тр}}}{T}. \quad (8.86)$$

С учетом (8.83), (8.84) и (8.86) получаем из (8.82):

$$v dp = -a^2 \left[\frac{d\Sigma}{\Sigma} + \frac{dw}{w} - \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \frac{dq_{\text{внеш}} + dq_{\text{тр}}}{c_p} \right]. \quad (8.87)$$

Подставляя полученное соотношение для $vd p$ в уравнение (2.83) и группируя члены, содержащие dw , в левой части уравнения, получаем:

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = \frac{d\Sigma}{\Sigma} - \frac{1}{v c_p} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dq_{\text{внеш}} - \frac{1}{a^2} dl_{\text{техн}} - \frac{1}{v c_p} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dq_{\text{тр}} - \frac{1}{a^2} dl_{\text{тр}} - \frac{g}{a^2} dz. \quad (8.88)$$

Учитывая, что

$$dq_{\text{тр}} = dl_{\text{тр}},$$

имеем:

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = \frac{d\Sigma}{\Sigma} - \frac{1}{v c_p} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dq_{\text{внеш}} - \frac{1}{a^2} dl_{\text{техн}} - \left[\frac{1}{v c_p} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p + \frac{1}{a^2} \right] dl_{\text{тр}} - \frac{g}{a^2} dz. \quad (8.88a)$$

Проанализируем полученное соотношение. При $q_{\text{внеш}} = 0$, $l_{\text{техн}} = 0$, $l_{\text{тр}} = 0$ и $dz = 0$ уравнение (8.88a) превращается, как и следовало ожидать, в уже известное нам уравнение (8.51).

Для течения в трубе постоянного сечения ($d\Sigma = 0$) при отсутствии технической работы, отсутствии трения и $dz = 0$, но при наличии подвода (или отвода) теплоты к потоку получаем на основании (8.88a):

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = - \frac{1}{v c_p} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dq_{\text{внеш}}. \quad (8.89)$$

Поскольку всегда $c_p > 0$ и обычно $(\partial v / \partial T)_p > 0$, из уравнения (8.89) следует, что в дозвуковом потоке ($M < 1$) подвод теплоты ($dq_{\text{внеш}} > 0$) приводит к ускорению потока ($dw > 0$), отвод теплоты — к его торможению; этого и следовало ожидать: при подводе теплоты газ в потоке расширяется и его скорость увеличивается. Любопытно отметить; что дозвуковой поток жидкости, у которой $(\partial v / \partial T)_p < 0$ (например, поток воды при $t < 4^\circ\text{C}$), будет замедляться при подводе теплоты к потоку.

Соответственно в сверхзвуковом потоке ($M > 1$) подвод теплоты, как видно из (8.89), будет приводить к торможению потока, а отвод — к ускорению его.

На этих выводах основан принцип устройства так называемого теплового сопла¹⁾. Тепловым соплом называют трубу постоянного сечения, поток в которой ускоряется за счет подвода или отвода теплоты через стенки трубы (рис. 8.12). Очевидно, что до тех пор, пока скорость потока не достигнет скорости звука, к нему нужно подводить теплоту. После того как скорость потока станет звуковой, дальнейшее ускорение потока достигается за счет отвода теплоты.

Нужно отметить, что теплота может подводиться к потоку (или отводиться от него) не только извне, через стенки трубы, но и за счет тепла химической реакции, происходящей в потоке газа.

¹⁾ Рассмотренные ранее сопла, в которых в соответствии с уравнением (8.51) изменение скорости потока достигается изменением площади сечения сопла, называют геометрическими соплами.

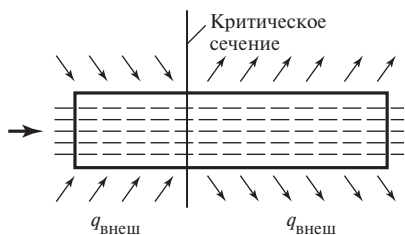


Рис. 8.12

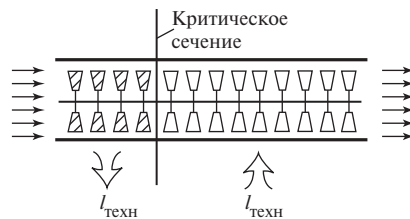


Рис. 8.13

Для течения в трубе постоянного сечения ($d\Sigma = 0$) при отсутствии внешнего теплообмена ($dq_{\text{внеш}} = 0$), отсутствии трения и $dz = 0$, но при наличии совершенной потоком (или подводимой к потоку от внешнего источника) технической работы получаем из (8.88а):

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = - \frac{1}{a^2} dl_{\text{техн}}. \quad (8.90)$$

Из этого соотношения следует, что в рассматриваемых условиях дозвуковой поток ($M < 1$), совершающий техническую работу (например, вращающий турбинное колесо или протекающий, если поток электропроводен, между электродами магнитогидродинамического генератора в поперечном магнитном поле), ускоряется ($dw > 0$). Соответственно подвод технической работы к потоку извне будет приводить к торможению последнего; этот вывод является несколько неожиданным. Это означает, например, что если в поток поместить крыльчатку, вращаемую от внешнего источника работы, то вращение этой крыльчатки будет приводить не к ускорению, а к замедлению потока. Подвод к сверхзвуковому ($M > 1$) потоку технической работы будет приводить к ускорению потока, а совершение потоком работы — к его замедлению.

Это обстоятельство используется в схеме так называемого механического сопла — теплоизолированной трубы постоянного сечения, в которой дозвуковой поток, движущийся без трения, ускоряется за счет отдачи работы на лопатках турбинных колес, размещенных в трубе; после того как поток достигает скорости звука, он поступает на лопатки нагнетателя, вращаемого от внешнего источника работы. Схема механического сопла представлена на рис. 8.13. Аналогичным образом для электропроводной жидкости механическое сопло в принципе можно создать, используя для ускорения дозвукового потока отдачу работы в МГД-генераторе (см. гл. 12), а после достижения звуковой скорости — подвод работы от МГД-насоса. Подчеркнем еще раз, что все эти рассуждения ведутся для трубы постоянного сечения.

Следует отметить принципиальную возможность использования для получения сверхзвуковых скоростей так называемых комбинированных сопел, у которых дозвуковая часть берется от сопла одного типа (геометрического, теплового или механического), а сверхзвуковая — от сопла другого типа. Например, в качестве дозвуковой части можно использовать суживающееся геометрическое сопло, а в качестве сверхзвуковой — трубу постоянного сечения с подводом теплоты извне.

К рассмотренным случаям течения примыкает процесс течения в негоризонтальной ($dz \neq 0$) трубе постоянного сечения при $dq_{\text{внеш}} = 0$, $dl_{\text{техн}} = 0$, $dl_{\text{тр}} = 0$. Для этого случая из (8.88а) получаем:

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = - \frac{g}{a^2} dz. \quad (8.91)$$

Из соотношения (8.91) следует, что дозвуковой ($M < 1$) поток газа, движущийся вверх ($dz > 0$), ускоряется ($dw > 0$), а сверхзвуковой ($M > 1$) поток, движущийся вверх, замедляется ($dw < 0$).

Эти выводы представляют интерес для анализа процессов истечения природного газа из скважин (сечение которых постоянно по высоте).

В случае адиабатного потока в трубе постоянного сечения при $dI_{\text{техн}} = 0$ и $dz = 0$, но при наличии потерь энергии на трение уравнение (8.88а) преобразуется следующим образом:

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = - \left[\frac{1}{v c_p} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p + \frac{1}{a^2} \right] dI_{\text{тр}}. \quad (8.92)$$

Случай течения с трением стоит несколько особняком по сравнению с рассмотренными выше видами течений: если все остальные дифференциалы, стоящие в правой части уравнения (8.88а), — $d\Sigma$, $dq_{\text{техн}}$, $dI_{\text{техн}}$ и dz — могут быть и положительными, и отрицательными, то, поскольку работа на преодоление сил трения может быть, естественно, только положительной, величина $dI_{\text{тр}} > 0$.

Из (8.92) следует, что в рассматриваемых условиях дозвуковой ($M < 1$) поток с трением ускоряется ($dw > 0$). Этот вывод не является неожиданным: поскольку работа трения превращается в теплоту, этот случай эквивалентен рассмотренному выше случаю течения с трением с подводом теплоты извне; как было показано, дозвуковой поток в трубе постоянного сечения при подводе теплоты ускоряется.

Очевидно, что при адиабатном течении с трением в трубе постоянного сечения поток может ускоряться до звуковой скорости, но перейти через скорость звука он не сможет, поскольку для этого нужно было бы отводить теплоту от потока, а теплота трения всегда подводится к потоку (и при дозвуковом, и при сверхзвуковом течении). Невозможность в рассматриваемых условиях перехода через скорость звука носит название кризиса течения.

Следует упомянуть еще об одном типе сопла — о так называемом расходном сопле, принцип действия которого состоит в следующем. Если ввести представление о плотности потока в канале как о расходе газа через единицу площади поперечного сечения канала

$$j = \frac{G}{\Sigma}, \quad (8.93)$$

то из рассмотрения обычного геометрического сопла Лаваля следует, что в дозвуковой (сужающейся) части сопла величина j растет ($d\Sigma < 0$ при $G = \text{const}$), достигает максимума в критическом сечении сопла и затем в сверхзвуковой (расширяющейся) части сопла уменьшается ($d\Sigma > 0$ при $G = \text{const}$).

В трубе постоянного сечения ($\Sigma = \text{const}$) этого же эффекта можно добиться изменением расхода газа G путем вдувания или отсоса этого газа через отверстия в боковой поверхности трубы (схему расходного сопла см. на рис. 8.14).

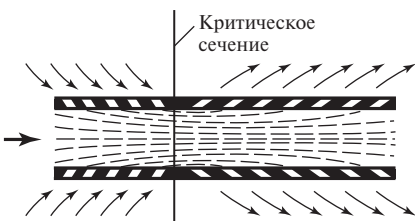


Рис. 8.14

Если увеличивать расход, вдувая газ, то плотность потока j , как видно из (8.93), будет возрастать ($dG > 0$ при $\Sigma = \text{const}$), что эквивалентно сужению геометрического сопла. Если, после того как скорость газа достигнет звуковой, осуществлять отвод части газа через боковую поверхность трубы, то j будет уменьшаться ($dG < 0$ при $\Sigma = \text{const}$) и поток будет продолжать ускоряться, ибо это эквивалентно расширению

геометрического сопла. Иными словами, изменением расхода в трубе постоянного сечения можно создать те же условия течения, что и в геометрическом сопле (сопле переменного сечения) при $G = \text{const}$.

Этот вывод нетрудно получить и аналитическим путем. Из уравнения (8.43) следует, что при переменном расходе

$$dv = v \left(\frac{d\Sigma}{\Sigma} + \frac{dw}{w} - \frac{dG}{G} \right). \quad (8.94)$$

Подставляя в уравнение (8.82) это соотношение вместо соотношения (8.84), получаем из (2.83) для $q_{\text{внеш}} = 0$, $q_{\text{тр}} = 0$, $l_{\text{техн}} = 0$, $dz = 0$ и $\Sigma = \text{const}$:

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = - \frac{dG}{G}. \quad (8.95)$$

Отсюда следует, что при $M < 1$ скорость потока растет при увеличении расхода ($dw > 0$ при $dG > 0$), а при $M > 1$ для увеличения скорости надо уменьшать расход ($dw > 0$ при $dG < 0$).

Как видно из изложенного, знак воздействия, которое нужно оказать на поток для его ускорения (подвод или отвод теплоты, работы, вещества и т.д.), меняется при переходе через скорость звука в критическом сечении сопла. Так, в тепловом сопле на его дозвуковом участке $dq_{\text{внеш}} > 0$ (подвод теплоты), а на сверхзвуковом участке $dq_{\text{внеш}} < 0$ (отвод теплоты). Уравнение (8.88а), позволяющее установить знак воздействия в зависимости от M , носит название закона обращения воздействий¹⁾.

Уравнения, аналогичные уравнению (8.88а) для скорости движения потока, могут быть получены также для давления, температуры и удельного объема в потоке газа (жидкости).

к оглавлению Главы 8

8.7. Температура адиабатного торможения

Заканчивая рассмотрение адиабатных процессов течения, остановимся на понятии температуры адиабатного торможения.

Напомним, что, как следует из уравнения (8.8), для двух произвольных точек обратимого адиабатного течения имеет место равенство

$$h_1 + \frac{w_1^2}{2} = h_2 + \frac{w_2^2}{2}, \quad (8.96)$$

или, что то же самое, для всего потока

$$h + \frac{w^2}{2} = \text{const}. \quad (8.96a)$$

Если газ в потоке можно рассматривать как идеальный, а его теплоемкость считать постоянной, не зависящей от температуры, то, поскольку энтальпия такого газа (отсчитываемая от 0 К) равна $h = c_p T$, уравнение (8.96) может быть записано в следующем виде:

$$T + \frac{w^2}{2c_p} = \text{const}. \quad (8.97)$$

Из уравнения (8.97) видно, что если обратимый адиабатный поток идеального газа с постоянной теплоемкостью, имеющий температуру T , полностью

¹⁾ Это уравнение и следствия из него получены Л.А. Вулисом.

заторможен ($w = 0$), то температура заторможенного потока (ее называют температурой адиабатного торможения $T_{a.т}$)

$$T_{a.т} = T + \frac{w^2}{2c_p}. \quad (8.98)$$

Из (8.98) видно, что всегда $T_{a.т} > T$. Поскольку для идеального газа [см. (7.55)] $k = c_p/c_v$ и в соответствии с уравнением Майера (2.67)

$$c_p - c_v = R,$$

то

$$c_p = \frac{Rk}{k-1} \quad (8.99)$$

и уравнение (8.98) может быть записано в виде

$$T_{a.т} = T + \frac{k-1}{2kR} w^2. \quad (8.100)$$

Наконец, с учетом того, что для идеального газа в соответствии с уравнением (8.25)

$$a = \sqrt{kRT},$$

выражение (8.100) для температуры адиабатного торможения может быть преобразовано следующим образом:

$$T_{a.т} = T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right). \quad (8.101)$$

Понятие о температуре адиабатного торможения широко используется в различных аэрогазодинамических расчетах. Всякий измерительный прибор, помещенный в поток, покажет температуру, близкую к температуре адиабатного торможения.

[предыдущая глава](#)

[к оглавлению](#)

[следующая глава](#)